Sur la théorie non commutative de l'intégration

Alain Connes

Table des matières

1 **Introduction** **2**

2 **Fonctions transverses sur G** **11**

3 **Mesures transverses sur G** **15**

4 **Image d'une mesure transverse** **20**

5 **Représentations de carré intégrable de G** **30**

6 **L'algèbre de von Neumann des opérateurs aléatoires** **40**

7 **Poids normaux semi finis sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$** **46**

8 **Mesures transverses et feuilletages** **57**

9 **Théorie de l'indice et feuilletages mesurés** **68**

10 **Remarques** **79**

1 Introduction

Soient V une variété compacte et F un sous-fibré *intégrable* du fibré tangent ; supposons que le feuilletage $\mathcal{F}$ tangent à F soit mesuré. On dispose alors (en supposant F orienté) du courant C associé par Ruelle et Sullivan à la mesure transverse ; il est fermé de même dimension que F et définit une classe d'homologie $[C]$, élément de l'espace de dimension finie $H_p(V, \mathbb{R})$. Considérant ce cycle comme le "cycle fondamental" du feuilletage mesuré, il est naturel de définir la caractéristique d'Euler Poincaré en évaluant $[C]$ sur la classe d'Euler du fibré F, $e(F) \in H^p(V, \mathbb{R})$. On espère alors interpréter cette caractéristique d'Euler sous la forme usuelle $\Sigma(-1)^i \beta_i$, où β_i désigne la "dimension moyenne" d'espaces de formes harmoniques (par rapport à une structure Riemannienne sur la feuille, dont β_i ne dépend pas)

$$\beta_i = \int_X \dim(H^i(f))\, d\Lambda(f)$$

où X désigne l'espace des feuilles du feuilletage. La difficulté principale pour établir une telle formule est que, en général, $\dim(H^i(f))$, (où $H^i(f)$ désigne l'espace de Hilbert des formes harmoniques de carré intégrable sur la feuille $f \in X$) est égal soit à 0 soit à $+\infty$, de sorte que, si l'on utilise la théorie usuelle de l'intégration, comme la fonction à intégrer est invariante par multiplication par 2, on a $\beta_i = 0$ ou $+\infty$.

Dans cet article, nous développons d'abord une généralisation de la théorie usuelle de l'intégration, qui, mieux adaptée à l'étude d'espaces singuliers comme l'espace des feuilles d'un feuilletage, l'espace des géodésiques d'une variété Riemannienne compacte ou celui des représentations irréductibles d'une C^*-algèbre, permet de donner une valeur finie à une intégrale comme celle qui définit β_i. Nous l'appliquons ensuite pour démontrer la version "feuilletage mesuré" du théorème de l'indice d'Atiyah Singer (cf. No VIII). Ce résultat s'inscrit dans la direction proposée par Singer dans [43] [44] et déjà illustrée par Atiyah dans [2].

Notre formalisme doit suffisamment aux idées de G. Mackey [22] [23] et A. Ramsey [30] [31] sur les groupes virtuels, pour que l'on puisse considérer cet article comme une réalisation du programme de G. Mackey [22]. Il y a cependant une nouveauté, cruciale pour la théorie des groupes virtuels, qui est celle de mesure transverse sur un groupoïde mesurable. Cette notion est étroitement reliée à la théorie des traces et des poids sur les algèbres de von Neumann. Le lien entre groupes virtuels et algèbres de von Neumann apparaît déjà clairement dans [8] Corollaire 10 et a été développé dans [21] [39] [38] [16] et [17].

Espaces mesurables singuliers et intégration des fonctions infinies

La donnée de départ en théorie classique de l'intégration (ou des probabilités) est celle d'un espace mesurable, c'est-à-dire d'un ensemble Ω (ensemble des résultats d'une expérience aléatoire) et d'une tribu $\mathcal{B}$ de partie de Ω (événements). Une mesure positive est alors une application Λ, dénombrablement additive, qui à toute fonction positive mesurable ν sur Ω associe un scalaire $\Lambda(\nu) \in [0, +\infty]$.

Bien que la théorie soit développée dans cette généralité, on l'applique surtout aux espaces mesurés usuels, c'est-à-dire réunion d'une partie dénombrable et d'un espace de Lebesgue. La classes des espaces mesurés usuels est cependant instable par l'opération élémentaire d'image directe : si p désigne une application de l'espace mesuré usuel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans l'ensemble Ω on munit Ω de la tribu $\mathcal{B} = \{B \subset \Omega, p^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ et de la mesure $\Lambda = p(\mu) : \Lambda(B) = \mu(p^{-1}(B))$. Ainsi, par exemple, si T désigne une transformation ergodique de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'image de μ par la projection naturelle p de X sur l'ensemble Ω des orbites de T est *singulière* au sens où toute fonction mesurable sur Ω est presque partout égale à une constante.

De même, l'espace des géodésiques d'une variété Riemannienne compacte est singulier dès que le flot géodésique est ergodique. La théorie usuelle est inefficace pour étudier ces espaces car elle est basée sur l'étude d'espaces fonctionnels qui dans les cas ci-dessus ne contiennent que les fonctions constantes. La seule notion que nous aurons à modifier, pour obtenir une théorie significative de l'intégration sur les espaces singuliers, est celle de fonction.

Considérons Ω comme un ensemble, sans autre structure supplémentaire, et examinons la notion usuelle de fonction positive sur Ω. Discutons d'abord le cas des fonctions à valeurs entières $f : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \infty\} = \overline{\mathbb{N}}$.

Définissons un entier $n \in \overline{\mathbb{N}}$ comme un nombre cardinal, de sorte que tout ensemble dénombrable Y définit un élément de $\overline{\mathbb{N}}$ et que deux ensembles Y_1, Y_2 définissent le même n ssi il existe une bijection de Y_1 sur Y_2.

De même considérons une fonction $f : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ comme destinée à mesurer la cardinalité d'un ensemble Y au-dessus de Ω (i.e. muni d'une application $\pi : Y \to \Omega$ avec $\pi^{-1}\{\omega\}$ dénombrable pour tout $\omega \in \Omega$) par l'égalité :

$$f(\omega) = \text{cardinalité } \pi^{-1}\{\omega\} \qquad \forall\, \omega \in \Omega\,.$$

L'axiome du choix montre que pour deux ensembles (Y_i, π_i), $i = 1, 2$, au-dessus de Ω définissent la même fonction f, il faut et il suffit qu'il existe une bijection φ de Y_1 sur Y_2 telle que $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$.

Prenons un exemple, soit Ω l'ensemble des géodésiques du tore plat $\mathbb{T}^2$ et C un arc de courbe (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{T}^2$

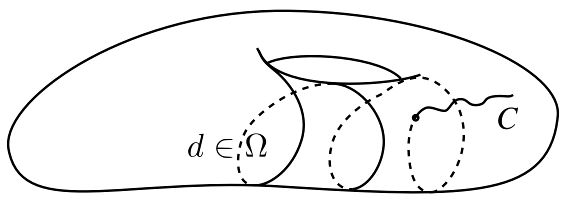

FIG. 1 –

Nous étudions la fonction f qui à toute géodésique $d \in \Omega$ associe la cardinalité de $d \cap C$.

Prenons pour premier ensemble au-dessus de Ω définissant f le sous-graphe de cette fonction, i.e. :

$$Y_1 = \{(d,n) \in \Omega \times \mathbb{N}\,,\ 0 \leq n < f(d)\} \qquad \pi_1(d,n) = d\,.$$

Le deuxième ensemble au-dessus de Ω qui représente également la fonction f est l'ensemble Y_2 des couples (d,c) où $d \in \Omega$, $c \in C \cap d$, et où l'on pose $\pi_2(d,c) = d$.

Comme une géodésique d passant par $c \in C$ est uniquement déterminée par la direction qu'elle a en ce point, on peut identifier Y_2 avec $C \times S^1$ et donc en faire un espace mesurable usuel.

Montrons que si φ est une bijection de Y_1 sur Y_2 telle que $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$, elle exhibe un sous-ensemble non mesurable de l'intervalle $[0,1]$. Choisissons un irrationel α et considérons le flot F de pente α sur $\mathbb{T}^2$. Associons à tout $x \in \mathbb{T}^2$ sa trajectoire $d(x)$ qui est une géodésique, $d(x) \in \Omega$. On a, en général, Cardinalité $(d(x) \cap C) = +\infty$. Ainsi l'application $x \to \varphi(d(x),0)$ est une injection de l'espace des trajectoires de F dans Y_2. Or, si l'on munit $\mathbb{T}^2$ de la mesure de Lebesgue, l'ergodicité du flot F montre que toute application mesurable de $\mathbb{T}^2$ dans un espace mesurable usuel (comme Y_2) qui est constante sur les orbites de F, est en fait presque partout égale à une constante. Ainsi l'application ci-dessus de $\mathbb{T}^2$ dans Y_2 ne peut être mesurable.

On voit donc que l'axiome du choix, en donnant la même cardinalité au-dessus de Ω aux ensembles Y_1 et Y_2 simplifie abusivement la situation. Tout en conservant l'axiome du choix nous définirons une *fonction généralisée* (à valeurs entières) sur Ω comme une classe d'équivalence d'espaces *mesurables* Y au-dessus de Ω, en n'autorisant comme équivalence $\varphi : Y_1 \to Y_2$, $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$ que les applications mesurables. (La structure mesurable sur Y est supposée usuelle et compatible avec $\pi : Y \to \Omega$ au sens où $G = \{(y_1,y_2), \pi(y_1) = \pi(y_2)\}$ est une partie mesurable de $Y \times Y$.)

Si F désigne une fonction généralisée sur Ω qui est finie, i.e. $\mathrm{Card}\, \pi^{-1}\{\omega\} < \infty$, $\forall\, \omega \in \Omega$, on voit facilement en munissant Y d'un ordre total mesurable (en l'identifiant à $[0,1]$), que F est équivalente au sous-graphe de la fonction $f(\omega) = \mathrm{Card}\, \pi^{-1}(\{\omega\})$. Ainsi la distinction ci-dessus n'intéresse que les fonctions infinies, on retrouve pour les valeurs finies la notion ordinaire.

(Le passage aux fonctions à valeurs réelles positives se fait de la même façon en considérant un réel $\alpha \in [0,+\infty]$ comme la classe de tous les espaces de Lebesgue de masse totale α.)

Prenons maintenant pour Ω un espace singulier image par l'application p d'un espace mesurable usuel $(X,\mathcal{A})$. Nous dirons alors qu'une fonction généralisée F sur Ω est mesurable si le sous-ensemble suivant de $X \times Y$ est mesurable :

$$\{(x,y)\,,\ x \in X\,,\ y \in Y\,,\ p(x) = \pi(y)\}\,.$$

Une *mesure généralisée* sur Ω est alors une règle qui attribue à toute fonction généralisée F, mesurable, sur Ω un scalaire $\Lambda(F) \in [0,+\infty]$ et vérifie :

1) *σ-additivité* : $\Lambda\left(\sum\limits_1^\infty F_n\right)= \sum\limits_1^\infty \Lambda(F_n)$ (où $\sum F_n$ est défini à partir de l'espace mesurable somme des espaces Y_n).

2) *Invariance* : $\Lambda(F_1) = \Lambda(F_2)$ si F_1 est équivalente à F_2.

Par exemple, dans le cas de l'espace Ω des géodésiques du tore $\mathbb{T}^2$ il existe sur Ω une mesure généralisée Λ telle que pour toute courbe $\mathcal{C}^\infty$ on ait :

$$\int \text{Cardinalité}\,(C \cap d)\, d\Lambda(d) = \text{Longueur de } C\,.$$

On peut, à titre d'exercice, démontrer que si l'espace $X, \mathcal{A}$ qui désingularise Ω est muni d'une mesure μ, telle que (en supposant $p^{-1}(\omega)$ dénombrable $\forall\, \omega \in \Omega$) on ait : $A \in \mathcal{A}$ μ-négligeable $\Rightarrow p^{-1}(p(A))$ μ-négligeable, et si toute fonction $p(\mu)$-mesurable sur Ω est presque partout constante, il existe alors sur Ω une mesure généralisée Λ, unique à un scalaire multiplicatif près, telle que :

3) $F = 0 \quad p(\mu)$-presque partout $\Rightarrow \Lambda(F) = 0$.

De plus l'ensemble des valeurs $\Lambda(F)$, F fonction généralisée à valeurs entières, est l'un des trois suivants :

I $\quad \{0, 1, \ldots, \infty\} = \overline{\mathbb{N}}$
II $\quad [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$
III $\quad \{0, +\infty\}$

Le cas I ne se produit que si Ω est réunion d'un point ω_0 et d'un ensemble négligeable, et on a alors $\Lambda(F) = \text{Card}\, F(\omega_0)$.

Le cas III exclu l'existence d'une mesure généralisée intéressante.

Dans le cas II, dont un exemple est l'espace des géodésiques sur une surface de Riemann compacte de genre > 1, on peut donner une intégrale finie à des fonctions généralisées infinies partout, ce qui signifie que l'espace singulier est de masse nulle. On peut réaliser concrètement un tel espace en partant de cette feuille de papier et en la pliant en deux une infinité de fois.

Mesures transverses sur les groupoïdes mesurables

Pour formaliser la notion d'espace mesurable quotient Ω du paragraphe précédent, nous partons d'un ensemble Ω muni d'une désingularisation, i.e. d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et d'une projection $p : X \to \Omega$. On suppose bien entendu que $G = \{(x_1, x_2), p(x_1) = p(x_2)\}$ est mesurable dans $X \times X$. En fait la propriété cruciale de G est d'être un *groupoïde mesurable* (cf. No I) pour la composition $(x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) = (x_1, x_3)$, l'application p définissant une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de G avec Ω. Nous appellerons donc plus généralement désingularisation de Ω la donnée d'un groupoïde mesurable G dont Ω est l'ensemble des classes. Si G_1 et G_2 sont deux groupoïdes mesurables

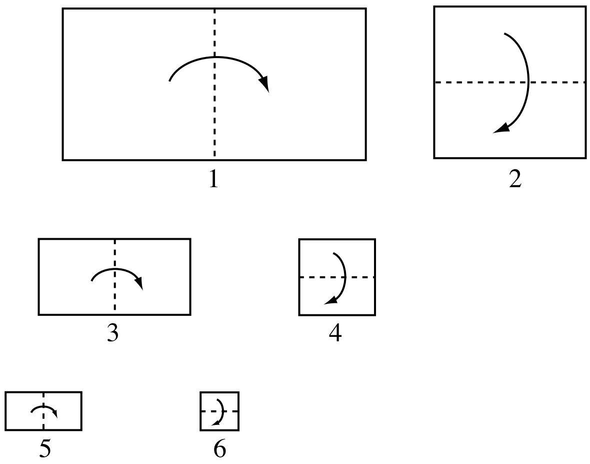

FIG. 2 –

et $h : G_1 \to G_2$ une équivalence (entre petites catégories) nous considérerons les désingularisations correspondantes de Ω comme équivalentes.

Notre programme est alors de traduire sur G la notion de mesure généralisée sur Ω, puis de vérifier que la théorie est invariante par équivalence.

Dans le numéro I nous introduisons la notion de *fonction transverse* sur un groupoïde mesurable. Dans le cas où $G = \{(x_1, x_2), p(x_1) = p(x_2)\}$ elle se réduit à celle de fonction généralisée sur Ω, de la forme (X, p, ν), à valeurs dans $[0, +\infty]$ (ce qui explique qu'il s'agisse d'une famille de mesures, un nombre réel étant représenté par un espace mesuré). Dans le cas opposé, où G est un groupe, elle se réduit à la notion de mesure de Haar à gauche.

Dans le numéro II nous introduisons la notion de *mesure transverse* de module δ, sur G, où δ désigne un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}_+^*$. Le cas $\delta = 1$ est exactement la traduction de la notion de mesure généralisée sur Ω, la condition de normalité (cf. II 1) est la traduction de la σ-additivité de Λ et la condition d'invariance à droite (cf. II 1) traduit l'invariance de Λ. Le cas *non unimodulaire* $\delta \neq 1$ est important car il permet de traiter le cas III ci-dessus. Le résultat principal que nous démontrons dans II est la caractérisation des mesures transverses Λ, de module δ, par la mesure $\mu = \int s(\delta^{-1}\nu^x)\, d\Lambda(x)$ sur $G^{(0)}$, ce qui constitue l'analogue du théorème classique de désintégration des mesures : ayant fixé la fonction transverse ν (avec $\nu^x \neq 0 \quad \forall\, x$), l'application $\Lambda \to \mu$ est une bijection entre mesures transverses de module δ sur G et mesures μ sur $G^{(0)}$ dont les mesures conditionnelles sur les classes d'isomorphisme d'objets sont proportionnelles aux $s(\delta^{-1}\mu)$.

Dans le numéro III nous montrons comment la donnée de Λ permet d'intégrer les fonctions généralisées mesurables sur Ω, ce qui nous permet de vérifier facilement l'invariance de notre notion par équivalence de groupoïdes mesurables. En particulier, on peut prendre l'image directe d'une mesure transverse Λ_1 sur G_1 par un foncteur mesurable $h : G_1 \to G_2$ et $\Lambda_2 = h(\Lambda_1)$ ne change pas si l'on remplace h par un foncteur équivalent. [C'est ici qu'apparaît le plus clairement l'avantage de notre formalisme sur la théorie existante des groupes virtuels de Mackey (cf. [23] [30] [31] [21]). Dans cette théorie on suppose fixée une classe de mesure sur G, ayant des propriétés de quasi-invariance, et la notion (dégagée dans [16] et [41]) de système de Haar remplace celle de mesure transverse. Cette notion ne se transporte pas d'un groupoïde à un groupoïde équivalent, chaque système de Haar définit une mesure transverse (cf. Théorème II 3) et seule cette dernière se transporte. En allégeant ainsi la donnée de départ on évite aussi toutes les difficultés liées à la composition des foncteurs (cf. [30] et [17]). Dans [30] on considère G comme identique au réduit G_A où A^c est négligeable, cette notion n'a pas de sens dans notre formalisme car seuls les ensembles *saturés* négligeables peuvent être définis à partir d'une mesure transverse Λ. Dans [30] A. Ramsey montre que les foncteurs mesurables ne sont pas toujours composables, seules leurs classes déquivalence le sont. L'unique raison est l'identification abusive ci-dessus de G avec G_A ; si on ne l'autorise que pour A *saturé*, Λ-négligeable la difficulté disparaît et on obtient une notion entièrement satisfaisante de foncteur absolument continu.

Algèbres de von Neumann et espaces singuliers

Passons maintenant au point de vue algébrique de la théorie des probabilités, i.e. celui qui étudie l'algèbre de Boole des événements, ou ce qui revient au même, l'algèbre des classes de variables aléatoires bornées : $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \Lambda)$.

Les algèbres que l'on obtient ainsi sont exactement les algèbres de von Neumann commutatives, et la théorie des traces (unimodulaire) et des poids (non unimodulaire) sur les algèbres de von Neumann générales constitue la théorie non commutative de l'intégration.

Soit M une algèbre de von Neumann et appelons M-module tout espace hilbertien $\mathcal{H}$ muni d'une représentation normale de M dans $\mathcal{H}$. Il est clair que les M-modules forment une catégorie $\mathcal{C}_M$; ce qui est intéressant c'est que la connaissance de la catégorie $\mathcal{C}_M$ permet de retrouver le genre de M (M_1 et M_2 ont même genre ssi leurs produits tensoriels par le facteur de type I_∞ sont isomorphes) (cf. [34]).

Dans le cas commutatif, où $M = L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \Lambda)$, la catégorie $\mathcal{C}_M$ se décrit comme celle des champs mesurables d'espaces de Hilbert sur Ω, un morphisme du champ $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ dans $(H'_\omega)_{\omega\in\Omega}$ étant une classe, modulo l'égalité presque partout, de sections mesurables $T = (T_\omega)_{\omega\in\Omega}$, où $T_\omega : H_\omega \to H'_\omega$ est un opérateur borné (et Ess Sup $\|T_\omega\| = \|T\|_\infty$ définit la norme).

Dans notre cadre l'espace des paramètres Ω est l'espace des classes d'isomorphisme d'objets du groupoïde mesurable $(G, \mathcal{B})$ muni d'une mesure transverse Λ. La notion de champ d'espaces de Hilbert sur Ω est remplacée par celle de foncteur mesurable de G dans la catégorie des espaces de Hilbert (pour la traduction de la mesurabilité cf. No IV). Comme quand G est un groupe cette notion se réduit à celle de représentation unitaire de G on parle également de représentation de G.

La catégorie $\mathcal{C}_\Lambda$, "duale" de $(G, \mathcal{B}, \Lambda)$, a pour objet des représentations de G et pour morphismes les classes, modulo l'égalité Λ-presque partout, d'opérateurs d'entrelacement (si $T = (T_x)_{x \in G}(0)$ est un opérateur d'entrelacement l'ensemble $\{x, T_x = 0\}$ est *saturé*; on peut donc définir sa nullité pour Λ).

Contrairement au cas usuel où $\mathcal{C}_\Lambda$ contient tous les champs mesurables sur Ω, le cas singulier nécessite de ne considérer que les *représentations de carré intégrable* de $(G, \mathcal{B})$.

Cette propriété de régularité ne dépend que de la structure mesurable de G, et on peut la définir en disant que H et de carré intégrable ssi c'est une sous-représentation d'une représentation H', avec $H' < H' \otimes K$ ($<$ signifie l'équivalence à une sous-représentation) pour toute représentation K avec $K_x \neq 0$, $\forall\, x$. Dans le cas où G est un groupe localement compact on retrouve la notion connue (cf. [15] [27] [28] [25]).

Notons que en général la catégorie $\mathcal{C}_\Lambda$ ne dépend que de la classe de Λ, i.e. que de la notion d'ensemble saturé Λ-négligeable. La catégorie $\mathcal{C}_\Lambda$ est de plus équivalente à une catégorie $\mathcal{C}_M$ où M est une algèbre de von Neumann, uniquement déterminée si on la choisit proprement infinie.

La donnée de Λ dans sa classe a pour duale, dans le cas unimodulaire $\delta = 1$, celle d'une fonction dimension sur $\mathcal{C}_\Lambda$, qui à tout H associe $\dim_\Lambda(H) = \int \dim(H_x)\, d\Lambda(x)$ (l'intégrale étant prise au sens singulier, cf. No VI). Dans le cas d'un groupe localement compact unimodulaire, une mesure transverse Λ est une forme linéaire positive sur l'espace à une dimension des mesures de Haar à gauche, et $\dim_\Lambda(H)$ est le degré formel usuel des représentations de carré intégrable par rapport à la mesure de Haar à gauche ν, telle que $\Lambda(\nu) = 1$.

Dans le cas non unimodulaire la donnée de Λ définit une trace, non sur l'algèbre de von Neumann $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ commutant de la représentation, mais sur l'espace des opérateurs de degré 1, i.e. vérifiant $U(\gamma)\, T_x\, U(\gamma)^{-1} = \delta(\gamma)\, T_y$, $\forall\, \gamma : x \to y$ (où $U(\gamma) : H_x \to H_y$ désigne la représentation de $\gamma \in G$). Ceci nous permet d'établir une bijection naturelle entre poids sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ et opérateurs de degré 1 positifs puis de calculer très simplement les invariants des poids tels le spectre du groupe d'automorphismes modulaires, son intégrabilité, son centralisateur.

Comme corollaire de notre présentation il est clair que la catégorie $\mathcal{C}_\Lambda$ (et donc l'algèbre de von Neumann proprement infinie correspondante) ne change pas si l'on remplace G par un groupoïde équivalent. De plus l'existence sur $\mathcal{C}_\Lambda$ d'une opération de *produit tensoriel* qui n'existe pas sur la catégorie $\mathcal{C}_M$ permet de montrer une propriété particulière des algèbres de von Neumann de la forme $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ (cf. Corollaire VII).

Théorème de l'indice pour les feuilletages mesurés

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété V, l'espace Ω des feuilles de $\mathcal{F}$ est en général un espace singulier, au numéro VII nous établissons le lien entre mesures transverses sur Ω et mesures transverses Λ au sens usuel [29] [45] [36] pour le feuilletage $\mathcal{F}$. Au numéro VIII nous démontrons la formule de l'indice pour tout opérateur elliptique D sur la feuille $\mathcal{F}$ d'un feuilletage mesuré $(\mathcal{F}, \Lambda)$ d'une variété compacte V :

$$\int_\Omega \dim(\ker D_f)\, d\Lambda(f) - \int_\Omega \dim(\ker\, D_f^*)\, d\Lambda(f) = \mathrm{ch}\, D\, \mathrm{Td}\,(V)\,[C]$$

où D_f désigne la restriction de D à la feuille $f \in \Omega$, où $\mathrm{ch}\, D$ désigne le caractère de Chern du symbole principal de D (cf. No VIII), $\mathrm{Td}\,(V)$ la classe de Todd de la variété V et $[C]$ le cycle asymptotique, $[C] \in H_p(V, \mathbb{R})$ associé à la mesure transverse Λ par Ruelle et Sullivan. Contrairement à ce qui se produit pour les revêtements de variétés compactes (cf. [2]) l'indice $\mathrm{Ind}_\Lambda(D)$ est, même après normalisation de Λ, en général irrationel. (Soient par exemple Γ_1 et Γ_2 deux réseaux de $\mathbb{C}$, munissons $V = \mathbb{C}/\Gamma_1 \times \mathbb{C}/\Gamma_2$ du feuilletage $\mathcal{F}$ défini par le groupe des translations $\tau_z(a, b) = (a + z, b + z)$ $(\forall\, (a, b) \in V\,,\ z \in \mathbb{C})$ et de la mesure transverse Λ associée à la mesure de Haar de V (en général c'est la seule mesure transverse pour f, à normalisation près). Soit E_1 (resp. E_2) le fibré complexe de dimension un sur V associé au diviseur $\{0\} \times \mathbb{C}/\Gamma_2$ (resp. $\mathbb{C}/\Gamma_1 \times \{0\}$), comme le fibré tangent à $\mathcal{F}$ est trivial on peut parler de l'opérateur $\overline{\partial}_{E_1}$ (resp. $\overline{\partial}_{E_2}$) agissant sur les sections de E_1 (resp. E_2) le long de $\mathcal{F}$. Pour toute feuille $f = \{(a + z, b + z), z \in \mathbb{C}\}$ de $\mathcal{F}$, le noyau $H_{E_1}(f)$ de $\overline{\partial}_{E_1}$ s'identifie à l'espace des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ n'ayant de pôle qu'aux points de $\Gamma_1 - a$ (avec ordre ≤ 1) et qui sont de carré intégrable (comme sections de E_1). Le noyau de $(\overline{\partial}_{E_1})^*$ est réduit à $\{0\}$ et la formule de l'indice donne :

$$\int \dim(H_{E_1}(f))\, d\Lambda(f) = \text{densité } (\Gamma_1)\,.$$

On a donc en général $\dim_\Lambda H_{E_1} / \dim_\Lambda H_{E_2} = \text{densité}\,\Gamma_1 / \text{densité}\,\Gamma_2 \notin \mathbb{Q}$. Si on prend le diviseur associé à $\{0\} \times \mathbb{C}/\Gamma_2 - \mathbb{C}/\Gamma_1 \times \{0\}$, en supposant que $\text{densité}\,\Gamma_1 \geq \text{densité}\,\Gamma_2$, le noyau de l'opérateur $\overline{\partial}_E$ (correspondant au fibré $E = E_1 \otimes E_2^*$) sur f, s'identifie à l'espace des fonctions méromorphes n'ayant de pôles qu'aux points de $\Gamma_1 - a$ mais nulles sur $\Gamma_2 - b$, et on a de même

$$\int \dim(H_E(f))\, d\Lambda(f) = \text{densité}\,\Gamma_1 - \text{densité}\,\Gamma_2\,.$$

On peut montrer que le noyau de $\overline{\partial}_E$ agissant dans l'espace des sections de carré intégrable de E sur V (en dérivant dans le sens des feuilles) n'est formé que des sections holomorphes de E sur V (de sorte que l'holomorphie le long des feuilles implique l'holomorphie sur V) dès que Γ_1 et Γ_2 sont en position générale. L'indice de $\overline{\partial}_E$ agissant sur V [1] est alors nul alors que celui de $\overline{\partial}_E$ sur $\mathcal{F}$ est $\text{densité}\,\Gamma_1 - \text{densité}\,\Gamma_2$ ce qui montre qu'il n'y a pas en général de relations entre ces deux indices analytiques.

[1] i.e. $\dim(\ker\, \overline{\partial}_E) - \dim(\ker(\overline{\partial}_E^*))$, bien que $\overline{\partial}_E$ ne soit pas elliptique au sens ordinaire, ces deux dimensions sont finies dans le cas considéré.

Notations

Soit G un *groupoïde*, c'est par définition une petite catégorie dans laquelle tout morphisme $\gamma : x \to y$ est un isomorphisme. Nous notons γ^{-1} l'inverse de γ. Soit $G^{(0)}$ l'ensemble des objet de G, nous l'identifions à $\{\gamma \in G, \gamma \circ \gamma = \gamma\}$. Pour $\gamma \in G$, $\gamma : x \to y$ nous notons $x = s(\gamma)$ et $y = r(\gamma)$, $s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma$ est l'objet *source* et $r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ l'objet *but*. Pour $(\gamma_1, \gamma_2) \in G \times G$ la composition $\gamma_1 \circ \gamma_2$ a un sens quand $s(\gamma_1) = r(\gamma_2)$, notons

$$G^{(2)} = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G \times G, s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\}\,.$$

Pour $y \in G^{(0)}$, soit $G^y = \{\gamma \in G, r(\gamma) = y\}$ et $G_y^y = \{\gamma \in G, \gamma : y \to y\}$, qui est un groupe.

La relation "x est isomorphe à y", i.e. $\exists\, \gamma \in G$, $\gamma : x \to y$ est une relation d'équivalence sur $G^{(0)}$ que nous écrirons $x \sim y$. Pour tout sous-ensemble A de $G^{(0)}$ le *saturé* $[A]$ est $\{x \in G^{(0)}, \exists\, y \in A, x \sim y\}$.

Pour tout sous-ensemble A de $G^{(0)}$, nous noterons G_A le groupoïde $G_A = \{\gamma \in G, s(\gamma) \in A, r(\gamma) \in A\}$, ainsi $G_{\{y\}} = G_y^y$. Nous appellerons groupoïde mesurable un couple $(G, \mathcal{B})$ d'un groupoïde G et d'une tribu de parties de G telles que les applications suivantes soient mesurables : $r, s, \gamma \mapsto \gamma^{-1}$ et $\circ$ (Composition). Nous dirons que G est *séparable* si la tribu $\mathcal{B}$ est dénombrablement engendrée.

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, nous noterons $\mathcal{F}^+(x)$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}^+(X)$) l'espace des applications mesurables de X dans $(0, +\infty]$ (resp. $[0, +\infty]$).

2 Fonctions transverses sur G

Soit G un groupoïde mesurable.

Nous appellerons *Noyau* sur G la donnée d'une application λ de $G^{(0)}$ dans l'espace des mesures *positives* sur G, telle que :

1) $\forall\, y \in G^{(0)}$, λ^y est portée par $G^y = r^{-1}(\{y\})$;

2) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, l'application $y \to \lambda^y(A) \in [0, +\infty]$ est mesurable.

Un noyau λ est dit *propre* si G est réunion d'une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles mesurables de G tels que $\gamma \to \lambda^{s(\gamma)}(\gamma^{-1}A_n)$ soit bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit λ un noyau sur G, on lui associe alors deux noyaux au sens usuel ([33] p. 8) de G dans G, définis par :

$R(\lambda)_\gamma = \gamma\lambda^x$ où $x = s(\gamma)$

$L(\lambda)_\gamma = (R(\lambda)_{\gamma^{-1}})^\sim$ où $\sim$ est l'application $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ de G dans G.

Le noyau λ est propre ssi $R(\lambda)$ est propre au sens de [33] p. 8. Par construction $R(\lambda)$ commute avec les translations à gauche et $L(\lambda)$ avec les translations à droite.

Pour $f \in \mathcal{F}^+(G)$ les fonctions $R(\lambda)f$ et $L(\lambda)f$ sont données par :

$$
\begin{aligned}
(R(\lambda)f)(\gamma) &= \int f(\gamma\gamma')\, d\lambda^x(\gamma') \qquad \forall\, \gamma \in G, \quad s(\gamma) = x\,. \\
(L(\lambda)f)(\gamma) &= \int f(\gamma'^{-1}\gamma)\, d\lambda^y(\gamma') \quad \forall\, \gamma \in G, \quad r(\gamma) = y\,.
\end{aligned}
$$

Nous écrirons $\lambda * f$ pour $L(\lambda)f$ et $f * \tilde{\lambda}$ pour $R(\lambda)f$.

Soit $\mathcal{C}^+$ l'espace des noyaux propres sur G.

Le théorème de Fubini montre que si λ_1 et λ_2 sont des noyaux propres sur G on a :

$$(\lambda_1 * f) * \tilde{\lambda}_2 = \lambda_1 * (f * \tilde{\lambda}_2) \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}^+(G)\,.$$

Soit λ un noyau sur G, pour toutes $f \in \mathcal{F}^+(G)$ notons $\lambda(f)$ la fonction positive sur $G^{(0)}$ telle que :

$$\lambda(f)(y) = \int f\, d\lambda^y \qquad \forall\, y \in G^{(0)}\,.$$

Pour toute $q \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$ on a $\lambda((q \circ r)f) = q \cdot \lambda(f)$.

Soient λ un noyau sur G et $h \in \mathcal{F}^+(G)$, l'application $y \mapsto h \cdot \lambda^y$ est encore un noyau sur G, noté $h\lambda$. Notons que $h\lambda$ est propre si λ est propre.

Soient λ_1, λ_2 des noyaux sur G, on définit leur produit de convolution $\lambda_1 * \lambda_2$ par l'égalité :

$$(\lambda_1 * \lambda_2)^y = \int (\gamma\, \lambda_2^x)\, d\lambda_1^y(\gamma) \qquad \forall\, y \in G^{(0)}\,.$$

En particulier pour toute $f \in \mathcal{F}^+(G)$ on a :

$$(\lambda_1 * \lambda_2)^y(f) = \iint f(\gamma\gamma')\, d\lambda_2^x(\gamma')\, d\lambda_1^y(\gamma) = \lambda_1^y(f * \tilde{\lambda}_2)\,.$$

Ainsi $\lambda_1 * \lambda_2$ est un noyau et $R(\lambda_1 * \lambda_2) = R(\lambda) \circ R(\lambda_2)$ au sens de la composition usuelle des noyaux [33] p. 11. On a de même $L(\lambda_1 * \lambda_2) = L(\lambda_1) \circ L(\lambda_2)$. La convolution des noyaux est associative [33] p. 11, mais même si λ_1 et λ_2 sont propres il se peut que $\lambda_1 * \lambda_2$ ne soit *pas* propre. La condition suivante est suffisante pour que cela ait lieu :

Lemme 1.
a) Si λ_1 est borné et λ_2 est propre, alors $\lambda_1 * \lambda_2$ est propre.
b) Si λ_2 est borné et porté par $B \in \mathcal{B}$, et si il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{B}$ telle que pour tout n, $\gamma \mapsto \lambda_1^{s(\gamma)}(\gamma^{-1}A_nB^{-1})$ soit borné, alors $\lambda_1 * \lambda_2$ est propre.

Démonstration.
a) En effet, λ est propre $\Leftrightarrow R(\lambda)$ est propre ([33] p. 8), et $R(\lambda_1 * \lambda_2) = R(\lambda_1) \circ R(\lambda_2)$ où $R(\lambda_1)$ est borné par hypothèse.
b) On a $(\lambda_1 * \lambda_2)^x(\gamma^{-1}A_n) = \int \lambda_2^{x'}(\gamma'^{-1}\gamma^{-1}A_n)\, d\lambda_1^x(\gamma') \leq C\, \lambda_1^x(\gamma^{-1}A_nB^{-1})$, d'où le résultat. Q.E.D.

Soit λ un noyau sur G, nous noterons $s(\lambda)$ (resp. $r(\lambda)$) le noyau usuel de $G^{(0)}$ dans $G^{(0)}$ tel que :

$$s(\lambda)_x = s(\lambda^x) \quad \forall\, x \in G^{(0)} \qquad (\text{resp. } r(\lambda)_x = r(\lambda^x) \quad \forall\, x)\,.$$

Même si λ est propre il se peut que $s(\lambda)$ ne soit pas propre. On a $s(\lambda)f = \lambda(f \circ s)$ et $s(\lambda_1 * \lambda_2) = s(\lambda_1) \circ s(\lambda_2)$ car :

$$L(\lambda)(f \circ r) = (s(\lambda)f) \circ r\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{F}^+(G)\,.$$

En effet $L(\lambda)(f \circ r)(\gamma) = \int (f \circ r)(\gamma'^{-1}\gamma)\, d\lambda^y(\gamma') = \int f \circ s(\gamma')\, d\lambda^y(\gamma')$.

Définition 2. On appelle *fonction transverse* sur G tout noyau ν vérifiant la condition suivante :

$$\gamma\nu^x = \nu^y \qquad \forall\, \gamma \in G\,,\ \gamma : x \mapsto y\,.$$

Soit ν une fonction transverse ; pour que ν soit propre il faut et il suffit qu'il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{B}$, telle que $x \mapsto \nu^x(A_n)$ soit bornée $\forall\, n \in \mathbb{N}$. (Les seules fonctions transverses qui nous intéressent sont celles qui sont propres, au point que nous omettons librement ce qualificatif quitte à dire que ν est impropre sinon.)

Soit ν une fonction transverse, alors $A = \{x, \nu^x \neq 0\}$ est un sous-ensemble mesurable de $G^{(0)}$ qui est saturé : $\forall\, \gamma : x \mapsto y$, $x \in A \Leftrightarrow y \in A$. Nous l'appellerons le *support* de ν.

Lemme 3. Soient ν et A comme ci-dessus ; si ν est propre, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}^+(G)$ telle que

$$\nu(f) = 1_A\,,\ \ f(\gamma) > 0 \qquad \forall\, \gamma \in G_A\,.$$

Démonstration. Par hypothèse G est réunion d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\nu(A_n) = C_n < \infty$ où $C_n \in \mathbb{R}_+^*$, ainsi avec $g = \Sigma\, 2^{-n}\, C_n^{-1}\, 1_{A_n}$ on a $g(\gamma) > 0$, $\forall\, \gamma$ et $\nu(g) \leq 1$. Pour $x \in A$, on a $\nu(g)(x) \neq 0$, on pose alors $f(\gamma) = (\nu(g)(r(\gamma)))^{-1} g(\gamma)$ pour $\gamma \in G_A$ et $f(\gamma) = 0$ sinon. Q.E.D.

Nous dirons que ν est *fidèle* si son support est égal à $G^{(0)}$. Nous notons $\mathcal{E}^+$ l'espace des fonctions transverses *propres* sur G, et $\overline{\mathcal{E}}^+$ celui de toutes les fonctions transverses sur G.

Proposition 4.

a) Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$, $f \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$, alors $(f \circ s)\, \nu \in \mathcal{E}^+$.

b) Supposons $(G, \mathcal{B})$ séparable. Soient $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{E}^+$. Supposons que pour tout $x \in G^{(0)}$, ν_1^x est absolument continue par rapport à ν_2^x, il existe alors $f \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$, telle que $\nu_1 = (f \circ s)\, \nu_2$.

Démonstration.

a) L'invariance à gauche de $(f \circ s)\, \nu$ est immédiate ; il faut vérifier que ce noyau est propre mais cela résulte de la finitude de f.

b) Soit $(\mathcal{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de partitions finies de G, mesurables, engendrant $\mathcal{B}$. Tout $\gamma \in G$ est dans un unique atome E_γ^n de $\mathcal{P}^n$ et on pose (cf. [33] p. 32)

$$\begin{array}{rcll} f_n(\gamma) & = & \nu_1^y(E_\gamma^n)/\nu_2^y(E_\gamma^n) & \text{si} \quad \nu_2^y(E_\gamma^n) \neq 0 \\ f_n(\gamma) & = & 0 & \text{si} \quad \nu_2^y(E_\gamma^n) = 0\,. \end{array}$$

Par construction f_n est mesurable et pour tout $y \in G^{(0)}$ la suite f_n restreinte à G^y converge ν_2^y-presque sûrement vers $d\nu_1^y/d\nu_2^y$. On pose $f = \lim f_n$ (et 0 là où la limite n'existe pas) et on obtient b). Q.E.D.

Proposition 5.

a) Soit ν un noyau sur G ; pour que ν soit une fonction transverse il faut et il suffit que

$$R(\nu)f = \nu(f) \circ r \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}^+(G)\,.$$

b) Soient ν une fonction transverse propre, λ un noyau propre sur G alors

$$\nu(\lambda * f) = \lambda(\nu(f) \circ s) = s(\lambda)(\nu(f)) \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}^+(G)\,.$$

c) Soient ν et λ comme en b) et $f \in \mathcal{F}^+(G)$ alors :

$$\lambda * f\nu = (\lambda * f)\nu \quad \text{et} \quad \lambda * \nu = (\lambda(1) \circ r)\nu\,.$$

Démonstration.
a) On a $(R(\nu)f)(\gamma) = \int f(\gamma\gamma')\,d\nu^x(\gamma')$ et $\nu(f)(r(\gamma)) = \int f(\gamma'')\,d\nu^y(\gamma'')$ d'où le résultat.

b) On a $\nu(\lambda * f)\circ r = R(\nu)L(\lambda)f = L(\lambda)R(\nu)f = L(\lambda)(\nu(f)\circ r)$ d'où le résultat.

c) Pour $y \in G^{(0)}$ et $A \in \mathcal{B}$ on a :

$$\begin{aligned}(\lambda * f\nu)^y(A) &= \int (f\nu)^x(\gamma^{-1}A)\,d\lambda^y(\gamma) = \iint f(\gamma^{-1}\gamma')\,1_A(\gamma')\,d\nu^y(\gamma')\,d\lambda^y(\gamma)\\ &= \int \left(\int f(\gamma^{-1}\gamma')\,d\lambda^y(\gamma)\right) 1_A(\gamma')\,d\nu^y(\gamma')\end{aligned}$$

où on peut appliquer Fubini grâce à l'hypothèse. Prenant $f = 1$ on obtient $\lambda * \nu = (\lambda(1)\circ r)\nu$ d'où c). Q.E.D.

Proposition 6.
a) Soient ν une fonction transverse et λ un noyau sur G, alors $\nu * \lambda$ est une fonction transverse.

b) Soient ν et ν' des fonctions transverses propres sur G avec $\mathrm{Support}\,\nu' \subset \mathrm{Support}\,\nu$, il existe alors un noyau propre λ sur G tel que $\nu' = \nu * \lambda$.

Démonstration.
a) Soit $f \in \mathcal{F}^+(G)$, il suffit de vérifier que $R(\nu * \lambda)f)(\gamma)$ ne dépend que de $r(\gamma)$, ce qui résulte de l'égalité :

$$(R(\nu * \lambda)f) = R(\nu)(R(\lambda)f)\,.$$

b) Soient $A = \mathrm{Support}\,\nu$ et $f \in \mathcal{F}^+(G)$ telle que $\nu(\tilde{f}) = 1_A$ (Lemme 3). Appliquons la Proposition 5c), on a :

$$\nu * f\nu' = (\nu * f)\,\nu' = (\nu(\tilde{f})\circ s)\,\nu' = \nu'$$

car $\nu * f = L(\nu)f = R(\nu)\tilde{f})^{\sim} = (\nu(\tilde{f})\circ r)^{\sim}$. Q.E.D.

Soit T un sous-ensemble mesurable de $G^{(0)}$. L'égalité

$$\nu(f)(y) = \sum_{\substack{\gamma\in G^y\\ s(\gamma)\in T}} f(\gamma)\,, \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}^+(G)$$

définit une fonction transverse ν_T, appelée *fonction caractéristique* de T. Nous dirons que T est une *transversale* si la fonctipn transverse ν_T est *propre*, cela implique que $s^{-1}(T) \cap G^y$ est dénombrable pour tout $y \in G^{(0)}$. Si G est un groupe localement compact, il est discret ssi $G^{(0)}$ est une transversale. Dans le cas général nous dirons que G est *discret* si $G^{(0)}$ est une transversale. Si $T \subset G^{(0)}$ est une transversale le groupoïde mesurable réduit G_T est discret.

3 Mesures transverses sur G

Soit δ une application mesurable de G dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\delta(\gamma_1\,\gamma_2) = \delta(\gamma_1)\,\delta(\gamma_2) \qquad \forall\,(\gamma_1,\gamma_2) \in G^{(2)}\,.$$

Rappelons que $\mathcal{E}^+$ désigne l'espace des fonctions transverses propres sur G. Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions transverses, majorée par une fonction transverse propre, alors l'égalité $\nu^x = \operatorname{Sup}_n \nu_n^x$ définit une fonction transverse ν, nous écrirons dans ces conditions $\nu = \operatorname{Sup}\nu_n$ et $\nu_n \uparrow \nu$.

Définition 1. On appelle *mesure transverse* de module δ sur G toute application linéaire Λ de $\mathcal{E}^+$ dans $[0,+\infty]$ telle que :

a) Λ est *normale* i.e. $\Lambda(\operatorname{Sup}\nu_n) = \operatorname{Sup}\Lambda(\nu_n)$ pour toute suite croissante majorée dans $\mathcal{E}^+$.

b) Λ est *de module* δ, i.e. pour tout couple $\nu,\nu' \in \mathcal{E}^+$ et tout noyau λ tel que $\lambda^y(1) = 1$, $\forall\,y \in G^{(0)}$ on a :

$$\nu * \delta\lambda = \nu' \Longrightarrow \Lambda(\nu) = \Lambda(\nu')\,.$$

Si $\delta = 1$, la condition b) exprime l'invariance de Λ par les translations à droite dans G, agissant sur $\mathcal{E}^+$. Nous dirons que Λ est *semi-finie* si pour tout $\nu \in \mathcal{E}^+$ on a : $\Lambda(\nu) = \operatorname{Sup}\{\Lambda(\nu'), \nu' \le \nu, \Lambda(\nu') < \infty\}$ et que Λ est σ*-finie* s'il existe une fonction transverse fidèle de la forme $\nu = \operatorname{Sup}\nu_n$, $\Lambda(\nu_n) < \infty$.

Dans la discussion qui suit, nous supposons Λ semi-finie.

Pour tout $\nu \in \mathcal{E}^+$ on a $(f\circ s)\,\nu \in \mathcal{E}^+$ pour toute $f \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$, l'égalité $\Lambda_\nu(f) = \Lambda((f\circ s)\nu)$ définit ainsi une mesure positive Λ_ν sur $G^{(0)}$ qui est semi-finie dès que Λ est semi-finie (Proposition 4b)).

La condition b) montre que si $\nu,\nu' \in \mathcal{E}^+$ et $\lambda \in \mathcal{C}^+$ vérifient $\nu' = \nu * \lambda$, on a $\Lambda(\nu') = \Lambda_\nu(\lambda(\delta^{-1}))$.

Proposition 2. Soit Λ une mesure transverse semi-finie de module δ.

a) Pour $\nu,\nu' \in \mathcal{E}^+$ et $f \in \mathcal{F}^+(G)$ on a :

$$\Lambda_\nu(\nu'(\tilde f)) = \Lambda_{\nu'}(\nu(\delta^{-1}f)) \qquad (\tilde f(\gamma) = f(\gamma^{-1}) \quad \forall\,\gamma)\,.$$

b) Soient $\nu,\nu' \in \mathcal{E}^+$, $\lambda \in \mathcal{C}^+$ avec $\nu' = \nu * \delta\lambda$ et $s(\lambda) = D$ la diffusion associée à λ sur $G^{(0)}$ alors : $\Lambda_{\nu'} = \Lambda_\nu \circ D$ et $\Lambda_{\nu'}(\nu'(f)) = \Lambda_\nu(\nu(\lambda * f * (\delta\lambda)^\sim))$ pour toute $f \in \mathcal{F}^+(G)$.

Démonstration.

a) Pour $f \in \mathcal{F}^+(G)$, appliquons l'égalité $\Lambda(\nu * \delta\lambda) = \Lambda_\nu(\lambda(1))$ à $\lambda = \tilde f \nu'$, cela donne :

$$\Lambda(\nu * \delta\,\tilde f\,\nu') = \Lambda_\nu(\nu'(\tilde f))\,.$$

La Proposition 5c) montre que $\nu * \delta\,\tilde{f}\,\nu' = (\nu(\tilde{\delta f}) \circ s)\,\nu'$ d'où l'égalité $\Lambda_{\nu'}(\nu(\tilde{\delta f})) = \Lambda_\nu(\nu'(\tilde{f}))$ ce qui prouve a).

b) Pour $f \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$ on a $\Lambda_{\nu'}(f) = \Lambda((f \circ s)(\nu * \delta\lambda)) = \Lambda(\nu * (f \circ s)\,\delta\lambda) = \Lambda_\nu(\lambda(f \circ s)) = \Lambda_\nu \circ D(f)$.

Pour $f \in \mathcal{F}^+(G)$ on a $\Lambda_{\nu'}(\nu'(f)) = \Lambda_{\nu'}((\nu * \delta\lambda)f) = \Lambda_{\nu'}(\nu(f * (\delta\lambda)^\sim)) = \Lambda_\nu(D(\nu(f * (\delta\lambda)^\sim)) = (\Lambda_\nu \circ \nu)(\lambda * f * (\delta\lambda)^\sim)$ car pour $g \in \mathcal{F}^+(G)$ in a $D(\nu(g)) = \lambda(\nu(g) \circ s) = \nu(\lambda * g)$ (Proposition 5b)). Q.E.D.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de désintégration des mesures, il caractérise les mesures μ sur $G^{(0)}$ de la forme Λ_ν.

Théorème 3. Soient ν une fonction transverse propre et A son support.

L'application $\Lambda \mapsto \Lambda_\nu$ est alors une bijection entre l'ensemble des mesures transverses de module δ sur G_A et l'ensemble des mesures positives μ sur $G^{(0)}$ vérifiant les conditions *équivalentes* suivantes :

1) $\delta(\mu \circ \nu)^\sim = \mu \circ \nu$

2) $\lambda, \lambda' \in \mathcal{C}^+$, $\nu * \lambda = \nu * \lambda' \in \mathcal{E}^+ \Rightarrow \mu(\delta^{-1}\lambda(1)) = \mu(\delta^{-1}\lambda'(1))$.

Démonstration. On peut supposer que $A = G^{(0)}$. Comme ν est alors fidèle, toute $\nu' \in \mathcal{E}^+$ est de la forme $\nu' = \nu * \delta\lambda$, $\lambda \in \mathcal{C}^+$ (Proposition 6b)) où $\lambda \in \mathcal{C}^+$, on voit donc (Définition 1b)) que l'application $\Lambda \mapsto \Lambda_\nu$ est injective. La proposition 2 montre que Λ_ν vérifie la condition 1). Il reste donc à montrer que 1) $\Rightarrow$ 2) et que toute μ vérifiant 2) est de la forme Λ_ν. Soit μ vérifiant 1) et soit D la diffusion $s(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{C}^+$. Pour toute $f \in \mathcal{F}^+(G)$ on a :

$$\begin{aligned}\mu(\lambda(\nu(f) \circ s)) &= (\mu \circ \nu)(\lambda * f) = \delta(\mu \circ \nu)^\sim(\lambda * f) = (\mu \circ \nu)(\tilde{\delta}(\lambda * f)^\sim) \\ &= (\mu \circ \nu((\delta f)^\sim * (\delta\lambda)^\sim) = \mu\,(\nu * \delta\lambda)(\tilde{\delta f}))\,.\end{aligned}$$

Cela montre en fait que $\mu \circ D_\lambda$ ne dépend que de $\nu * \delta\lambda$ d'où 2).

Montrons maintenant l'existence de Λ à partir de μ.

Tout $\nu' \in \mathcal{E}^+$ est de la forme $\nu' = \nu * \lambda$; la condition 2) permet donc de définir Λ par l'égalité :

$$\Lambda(\nu * \lambda) = \mu(\delta^{-1}\lambda(1))\,.$$

Vérifions les conditions a) b) de la Définition 1) :

Pour $\nu'_n \uparrow \nu'_\infty$ dans $\mathcal{E}^+$, et $f \in \mathcal{F}^+(G)$ telle que $\nu(\tilde{f}) = 1$ (Lemme 3) on a $\nu'_n = \nu * \delta\lambda_n$ où $\lambda_n = \delta^{-1} f \nu'_n$ (Proposition 5c)). Ainsi $\Lambda(\nu'_n) = \mu(\nu'_n(\delta^{-1}(f))$. Or comme $\nu'_n \uparrow \nu'_\infty$ la suite croissante $\nu'_n(f\delta^{-1})$ de fonctions mesurables sur $G^{(0)}$ a pour sup la fonction $\nu'_\infty(f\delta^{-1})$ de sorte que $\mu(\nu'_n(\delta^{-1}f)) \uparrow \mu(\nu'_\infty(\delta^{-1}f))$ d'où a).

Montrons b). Soient $\nu_1 = \nu * \delta\lambda_1 \in \mathcal{E}^+$ et $\lambda \in \mathcal{C}^+$ avec $\nu_2 = \nu_1 * \delta\lambda \in \mathcal{E}^+$. On a $\nu_2 = \nu * \delta(\lambda_1 * \lambda)$ donc $\Lambda(\nu_2) = \mu((\lambda_1 * \lambda)(1)) = \mu(\lambda_1(1))$ car $(\lambda_1 * \lambda)(1) = \lambda_1(1)$, d'où le résultat.

Il reste à vérifier que $\Lambda_\nu = \mu$, pour $f \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$ soit $\lambda \in \mathcal{C}^+$ tel que $\lambda^y = f(y)\,\varepsilon_y$, $\forall\, y \in G^{(0)}$, alors $\delta\lambda = \lambda$, $\Lambda((f \circ s)\nu) = \Lambda(\nu * \delta\lambda) = \mu(\lambda(1)) = \mu(f)$.

Q.E.D.

Remarques.

1) Si μ est semi-finie il en est de même pour Λ.

2) Si μ est σ-finie, il en est de même de Λ, en effet si $\lambda_n \uparrow \lambda$ on a $\nu * \lambda_n \uparrow \nu * \lambda$.

3) Si Λ est σ-finie il en est de même de $\Lambda_{\nu'}$, $\forall\, \nu' \in \mathcal{E}^+$. En effet si $\nu' = \nu * \delta\lambda$ avec $\lambda \in \mathcal{C}^+$ il existe une suite croissante $\lambda_n \uparrow \lambda$, $\lambda_n \in \mathcal{C}^+$ telle que $\Lambda_\nu(\lambda_n(1)) < \infty$, on a alors $\nu'_n \uparrow \nu'$, $\Lambda(\nu'_n) < \infty$ avec $\nu'_n = \nu * \delta\lambda_n$.

Corollaire 4. Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse fidèle et B un sous-ensemble mesurable de $G^{(0)}$ tel que $s^{-1}(B)$ porte ν^x, pour tout $x \in G^{(0)}$. Soit ν_B la fonction transverse propre sur G_B qui à $y \in B$ associe la restriction de ν^y à $G^y \cap s^{-1}(B)$.

Pour toute mesure transverse Λ sur G de module δ il existe une unique mesure transverse Λ_B de module δ_B sur G_B telle que $(\Lambda_B)_{\nu_B} = (\Lambda_\nu)_B$. L'application $\Lambda \mapsto \Lambda_B$ est une bijection entre mesures transverses de modules δ, δ_B sur G et G_B, indépendante du choix de ν.

Démonstration. Par construction ν_B est une fonction transverse fidèle sur G_B et $\mu = \Lambda_\nu$ est portée par B. Il est clair que $\mu_B \circ \nu_B = \delta_B(\mu_B \circ \nu_B)^\sim$ d'où l'existence de Λ_B et son unicité. Réciproquement, soit Λ' une mesure transverse de module δ_B sur G_B et $\mu' = \Lambda'_{\nu_B}$. Considérons μ' comme une mesure sur $G^{(0)}$ nulle hors de B, pour $f \in \mathcal{F}^+(G)$, on a :

$$(\mu' \circ \nu)(f) = \int_{y \in B} \nu^y(f)\, d\mu'(y) = \iint_{\gamma \in G_B} f(\gamma)\, d\nu^y(\gamma)\, d\mu'(y)\,.$$

Cela montre que $(\mu' \circ \nu) = \delta(\mu' \circ \nu)^\sim$. Il reste à montrer que Λ_B ne dépend pas du choix de ν et pour cela il suffit de vérifier l'égalité pour un couple ν, ν' avec $\nu \leq \nu'$ i.e. $\nu = (a \circ s)\,\nu'$, $a \in \mathcal{F}^+(G^{(0)})$. On a $\Lambda_\nu = a\Lambda_{\nu'}$ et $\nu_B = (a_B \circ s)\,\nu'_B$ d'où $(\Lambda_B)_{\nu_B} = a_B(\Lambda_B)_{\nu'_B}$.

Corollaire 5. Soient $T \subset G^{(0)}$ une transversale fidèle et $\nu = \nu_T$ sa fonction caractéristique. Alors $\Lambda \mapsto \Lambda_\nu$ est une bijection entre mesures transverses de module δ sur G et mesures μ sur T telles que :

$$d\mu(r(\gamma)) = \delta(\gamma)\, d\mu(s(\gamma)) \qquad \forall\, \gamma \in G_T\,.$$

Nous renvoyons à [16] Corollaire 2 et Définition 2.1 pour l'interprétation de l'égalité $d(\mu \circ r) = \delta\, d(\mu \circ s)$ ci-dessus.

Démonstration. Le Corollaire 5 permet de supposer que $G = G_T$, i.e. $T = G^{(0)}$. On a

$$\nu^y(f) = \sum_{r(\gamma)=y} f(\gamma)\,, \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}^+(G)$$

de sorte que

$$(\mu \circ \nu)(f) = \int_{G^{(0)}} \left(\sum_{r(\gamma)=y} f(\gamma) \right) d\mu(y) = \int f(\gamma)\, d\mu \circ r(\gamma)\,,$$

la condition 1 du Théorème 3 s'écrit alors $d(\mu \circ r)(\gamma^{-1}) = \delta(\gamma)^{-1}\, d(\mu \circ r)(\gamma)$ d'où le résultat. Q.E.D.

Corollaire 6. Soient $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, H un groupe localement compact agissant mesurablement sur X par $(x, h) \to xh$ et $G = X \times H$ le groupoïde mesurable correspondant, δ un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}_+^*$. Soient dh une mesure de Haar à gauche sur H et ν la fonction transverse correspondante sur G. Alors $\Lambda \mapsto \Lambda_\nu$ est une bijection entre mesures transverses de module δ sur G et mesures μ sur X telles que :

$$\Delta_H^{-1}(h)\, d(h\mu)(x) = \delta(x, h)^{-1}\, d\mu(x)\,.$$

Démonstration. Pour $\gamma = (x, h) \in G$ on a $r(\gamma) = x$, $s(\gamma) = xh = h^{-1}x$. On a $\delta(x, h_1\, h_2) = \delta(x, h_1)\, \delta(h_1^{-1}x, h_2)$ en d'autres termes $h \mapsto \delta_h$ est un cocycle de H à valeurs dans l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour toute fonction mesurable positive sur $G = X \times H$ on a :

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)(f) &= \int f(x, h)\, dh\, d\mu(x) \\ (\mu \circ \nu)(\tilde{f}) &= \int f(xh, h^{-1})\, dh\, d\mu(x) = \int f(y, k)\, \Delta_H(k)^{-1}\, dk\, d(k\mu)(y)\,. \end{aligned}$$

Le Théorème 3 donne donc le résultat. Q.E.D.

Notons enfin à quoi se réduit la notion de mesure transverse de module δ dans le cas très particulier où G est le graphe d'une relation d'équivalence *dénombrablement séparée* sur un espace mesurable usuel Y. Soient donc $\pi : Y \to X$ une application mesurable et supposons l'existence d'une application mesurable $x \mapsto \alpha(x)$ de X dans l'espace des mesures de probabilité sur Y avec $\alpha(x)$ portée par $\pi^{-1}\{x\}$, $\forall\, x$. Soient $G = \{(x, y), \pi(x) = \pi(y)\}$ le groupoïde mesurable graphe de la relation d'équivalence associée à π, et δ un homomorphisme mesurable de G dans $\mathbb{R}_+^*$. Il existe sur G une unique fonction transverse $\nu = s^*\alpha$ telle que $s(\nu^x) = \alpha(\pi(x))$, $\forall\, x \in Y$ et $\Lambda \mapsto \Lambda_\nu$ est une bijection entre mesures transverses de module δ sur G et mesures μ sur X qui se désintègrent selon π en :

$$\mu = \int_X \beta_a\, d\rho(a) \qquad \beta_a = e^v\, \alpha(a)$$

avec V fonction mesurable de Y dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\gamma \in G$ on ait $V(r(\gamma)) - V(s(\gamma)) = \mathrm{Log}(\delta(\gamma))$. En particulier, si $\delta = 1$, cela signifie que μ est une intégrale des mesures $\alpha(x)$. On obtient ainsi une correspondance canonique, indépendante du choix de α, entre mesures transverses sur G et mesures ordinaires sur X. La mesure transverse Λ correspondant à la mesure ρ sur X s'écrit

$$\Lambda(\nu) = \int_X \nu^y(1)\, d\rho(x)$$

où pour $y \in \pi^{-1}\{x\}$, la masse totale $\nu^y(1)$ de ν^y ne dépend pas du choix de y.

Rôle joué par les sous-ensembles Λ-négligeables

Soient Λ une mesure transverse de module δ sur G et $A \subset G^{(0)}$ un sous-ensemble mesurable *saturé* de $G^{(0)}$.

Définition 7. A est Λ-*négligeable* ssi il est Λ_ν-négligeable $\forall\, \nu \in \mathcal{E}^+$.

Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$, $B = \operatorname{Supp} \nu$ et f comme dans le Lemme 3. La classe de la mesure $s(f\nu^x)$ sur $G^{(0)}$ est indépendante du choix de f et ne change pas si on remplace x par y, $[y] = [x]$. Nous dirons que $A \subset G^{(0)}$, mesurable, est $s(\nu^x)$-négligeable si il est $s(f\nu^x)$-négligeable.

Proposition 8.

a) Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$, $B = \operatorname{Supp} \nu$, A un sous-ensemble saturé mesurable de $G^{(0)}$ alors si $A \subset B$:

$$A \text{ est } \Lambda_\nu\text{-négligeable} \iff A \text{ est } \nu\text{-négligeable.}$$

b) Soit A un sous-ensemble mesurable de $G^{(0)}$ et pour $\nu \in \mathcal{E}^+$, soit $[A]_\nu = \{x \in G^{(0)}$, A n'est pas $s(\nu^x)$-négligeable$\}$. Alors $[A]_\nu$ est saturé mesurable et :

$$\Lambda_\nu(A) = 0 \iff [A]_\nu \text{ est } \Lambda\text{-négligeable.}$$

Démonstration.

a) On peut supposer que $B = G^{(0)}$. Tout $\nu' \in \mathcal{E}^+$ est de la forme $\nu' = \nu * \delta\lambda$, λ noyau propre sur G. On a :

$$\Lambda_{\nu'}(1_A) = \Lambda_\nu(\lambda(1_A \circ s)) = \Lambda_\nu(\lambda(1_A \circ r)) = 0\,.$$

b) Pour f comme dans le Lemme I.3, on a :

$$[A]_\nu = \{x \in G^{(0)}, \nu^x((1_A \circ s)f) \neq 0\} \in \mathcal{B}\,.$$

Pour que $[A]_\nu$ soit Λ_ν-négligeable il faut et il suffit que $\int \nu^x((1_A \circ s)f)\, d\Lambda_\nu(x) = 0$. L'égalité $(\Lambda_\nu \circ \nu)^\sim = \delta^{-1}(\Lambda_\nu \circ \nu)$ montre donc que cela a lieu ssi A est Λ_ν-négligeable. Q.E.D.

4 Image d'une mesure transverse

Définition des variables aléatoires sur $(G, \mathcal{B}, \Lambda)$

En théorie classique des probabilités une variable aléatoire positive désigne simplement une fonction mesurable à valeurs positives. Dans notre cadre, où $(G, \mathcal{B}, \Lambda)$ remplace l'espace de probabilité, nous chercherons une telle variable aléatoire F comme un foncteur de G dans la "catégorie des nombres réels positifs".

La petite catégorie formée de l'ensemble $[0, +\infty]$ muni de sa structure triviale (pas de morphisme de x à y sauf si $x = y$) est trop restreinte, en particulier si Λ est ergodique on vérifie que tout foncteur mesurable à valeurs dans cette catégorie est presque partout constant.

Nous remplaçons donc $\bar{\mathbb{R}}_+$ par la catégorie, notée $\bar{\mathcal{R}}_+$, des espaces mesurés usuels sans atome. [Un espace mesuré usuel est un triplet $(Z, \mathcal{A}, \alpha)$ où $(Z, \mathcal{A})$ est mesurable standard et α est une mesure positive σ-finie.] De même $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, \infty\}$ est remplacé par la catégorie $\mathcal{N}$ des ensembles dénombrables.

La mesurabilité d'un foncteur F de G dans $\bar{\mathcal{R}}_+$ traduit l'existence sur l'ensemble $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} F(x)$ (réunion disjointe) d'une structure mesurable usuelle pour laquelle les applications suivantes sont mesurables :

– La projection π de X sur $G^{(0)}$

– La bijection naturelle de $\pi^{-1}\{x\}$ sur $F(x)$, $x \in G^{(0)}$

– L'application $x \mapsto \alpha^x$ mesure σ-finie sur $F(x)$

– L'application qui à $(\gamma, z) \in G \times X$, $s(\gamma) = \pi(z)$ associe $F(\gamma)z \in X$.

Bien que cela ne soit pas nécessaire, nous supposerons que X est réunion dénombrable d'une suite X_n avec $\alpha^x(X_n)$ bornée pour tout n.

Le module δ de G conduit à définir la condition de variation des mesures $(\alpha^x)_{x \in G^{(0)}}$ sous la forme

$$F(\gamma)\, \alpha^x = \delta(\gamma)\, \alpha^y \qquad \forall\, \gamma \in G\,,\ \gamma : x \to y\,.$$

Si F_1 et F_2 sont des variables aléatoires sur G nous noterons $F_1 \oplus F_2$ la variable aléatoire qui à $x \in G^{(0)}$ associe $F_1(x) \oplus F_2(x)$, somme directe des espaces mesurables. On définira de même le produit.

Construction de l'intégrale $\displaystyle\int F\, d\Lambda$

Soient F une variable aléatoire positive sur $(G, \mathcal{B}, \Lambda)$ et $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} F(x)$ l'espace mesurable correspondant.

Pour toute $f \in \overline{\mathcal{F}^+}(X)$ et tout noyau λ sur G l'égalité $(\lambda * f)(z) = \int f(\gamma^{-1} z)\, d\lambda^y(\gamma)$, $y = \pi(z) \in G^{(0)}$ définit $\lambda * f \in \overline{\mathcal{F}^+}(X)$, on a $(\lambda_1 * \lambda_2) * f = \lambda_1 * (\lambda_2 * f)$ pour tous les noyaux λ_1, λ_2 et toute $f \in \overline{\mathcal{F}^+}(X)$.

Lemme 1. Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$, fidèle.

1) La quantité

$$\int F\,d\Lambda = \mathrm{Sup}\,\{\Lambda_\nu(\alpha(f))\,,\ f\in\mathcal{F}^+(X)\,,\ \nu * f\le 1\}$$

ne dépend pas du choix de ν *fidèle*.

2) Il existe des variables aléatoires positives F_1, F_2 avec $F_1\oplus F_2 = F$ telles que $\int F_1\,d\Lambda = 0$ et que sur $X_2 = \underset{x\in G^{(0)}}{\cup} F_2(x)$ il existe $f_2\in\mathcal{F}^+(X_2)$ avec $\nu * f_2 = 1$.

3) Si $f, f'\in\mathcal{F}^+(X)$ vérifient $\nu * f\le \nu * f'\le 1$, on a :

$$\Lambda_\nu(\alpha(f))\le\Lambda_\nu(\alpha(f'))\,,$$

en particulier pour F_2 et f_2 comme en 2), on a

$$\int F_2\,d\Lambda = \Lambda_\nu(\alpha(f_2))\,.$$

Démonstration.

1) Soient $\nu,\nu'\in\mathcal{E}^+$, $g\in\mathcal{F}^+(G)$ avec $\nu'(\tilde g) = 1$, et $\lambda = g\nu$ de sorte que $\nu = \nu' * \lambda$. Pour $f\in\mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu * f\le 1$ on a $\lambda * f\in\mathcal{F}^+(X)$ et $\nu' * (\lambda * f) = \nu * f\le 1$, il nous suffira donc de comparer $\Lambda_{\nu'}(\alpha(\lambda * f))$ avec $\Lambda_\nu(\alpha(f))$. Le théorème de Fubini justifie les égalités suivantes, où l'on a posé $h(\gamma) = \int f(\gamma^{-1} z)\,d\alpha^y(z)$, $\forall\,\gamma\in G^y$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\nu'}(\alpha(\lambda * f)) &= \iiint f(\gamma^{-1}z)\,g(\gamma)\,d\nu^y(\gamma)\,d\alpha^y(z)\,d\Lambda_{\nu'}(y)\\
&= \iint h(\gamma)\,g(\gamma)\,d\nu^y(\gamma)\,d\Lambda_{\nu'}(y)\\
&= \iint h(\gamma^{-1})\,g(\gamma^{-1})\,\delta(\gamma^{-1})\,d\nu'^y(\gamma)\,d\Lambda_\nu(y)\\
&= \iiint f(\gamma z)\,g(\gamma^{-1})\,\delta(\gamma^{-1})\,d\alpha^x(z)\,d\nu'^y(\gamma)\,d\Lambda_\nu(y)\\
&= \iint g(\gamma^{-1})\,d\nu'^y(\gamma)\,f(z)\,d\alpha^y(z)\,d\Lambda_\nu(y) = \Lambda_\nu(\alpha(f))\,.
\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé les égalités $\Lambda_{\nu'}\circ\nu = \delta^{-1}(\Lambda_\nu\circ\nu')^\sim$, $F(\gamma)\,\alpha^x = \delta(\gamma)\,\alpha^y$ et $\nu'(\tilde g) = 1$.

2) Pour toute $f\in\mathcal{F}^+(X)$ la fonction $\nu * f$ sur X est invariante par l'action de G, en particulier $Y = \{z\in X, (\nu * f)(z) > 0\}$ étant G-invariant on peut définir une variable aléatoire F_Y pour laquelle $F_Y(x) = Y\cap F(x)$, $\forall x\in G^{(0)}$, et $\underset{x\in G^{(0)}}{\cup} F_Y(x) = Y$, $\alpha_Y^x = \alpha^x$ restreint à Y.

Si $f\in\mathcal{F}^+(X)$ vérifie $\nu * f\le 1$ et Y est défini comme ci-dessus, on a $\nu * g = 1_Y$ où $g(z) = f(z)(\nu * f)(z)^{-1}$ pour $z\in Y$ et $g(z) = 0$ pour $z\notin Y$. Ainsi l'ensemble des sous-ensembles mesurables A, invariants, de $X = \cup F(x)$ tels que $1_A = \nu * g$ pour une $g \in \mathcal{F}^+(X)$ est stable par réunion dénombrable. Sur X ma mesure $\Lambda_\nu \circ \alpha$ est σ-finie, il existe donc A comme ci-dessus tel que pour toute $f \in \mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu * f \leq 1$ on ait $(\Lambda_\nu \circ \alpha)(\{z \in X, (\nu * f)(z) > 0\} \cap A^c) = 0$. Posons $F_1 = F_{A^c}$ et $F_2 = F_A$. Montrons que $\int F_1 \, d\Lambda = 0$. Il suffit de montrer que pour $f \in \mathcal{F}^+(X)$, avec $\nu * f \leq 1$, on a $x \mapsto \alpha^x(f)$, $s(\nu^y)$ négligeable Λ presque sûrement. Par hypothèse

$$\iiint f(\gamma^{-1} z) \, d\nu^y(\gamma) \, d\alpha^y(z) \, d\Lambda_\nu(y) = 0 \, .$$

Or,

$$\begin{aligned}\iint f(\gamma^{-1} z) \, d\nu^y(\gamma) \, d\alpha^y(z) &= \iint f(\gamma^{-1} z) \, d\alpha^y(z) \, d\nu^y(\gamma) \\ &= \iint \delta(\gamma^{-1}) \, f(z') \, d\alpha^x(z') \, d\nu^y(\gamma) \, ,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3) D'après 2) on peut supposer l'existence de $g \in \mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu * g = 1$. Pour $y \in G^{(0)}$ soit β^y la mesure $f\alpha^y$ sur $F(y)$, il nous suffit de montrer l'égalité

$$\Lambda_\nu(\alpha(f)) = \Lambda_\nu((\delta^{-1} \, \nu * \beta)(g))$$

car par hypothèse $\nu * f \leq \nu * f'$ donc $\delta^{-1} \nu * \beta \leq \delta^{-1} \nu * \beta'$. On a :

$$(\delta^{-1} \, \nu * \beta)^y = \int F(\gamma) \, \beta^x \, \delta(\gamma)^{-1} \, d\nu^y(\gamma) \, ,$$

et donc, avec $h(\gamma) = \int g(\gamma^{-1} z) \, d\beta^y(z)$ on a :

$$\begin{aligned}\Lambda_\nu((\delta^{-1} \nu * \beta) g) &= \iiint g(\gamma z) \, d\beta^x(z) \, \delta(\gamma)^{-1} \, d\nu^y(\gamma) \, d\Lambda_\nu(y) \\ &= \iint h(\gamma^{-1}) \, \delta(\gamma)^{-1} \, d\nu^y(\gamma) \, d\Lambda_\nu(y) = \iint h(\gamma) \, d\nu^y(\gamma) \, d\Lambda_\nu(y) \\ &= \int \beta^y(\nu * g) \, d\Lambda_\nu(y) = \int \beta^y(1) \, d\Lambda_\nu(y) = \Lambda_\nu(\alpha(f)) \, .\end{aligned}$$

Q.E.D.

L'énoncé 2) du Lemme 1 nous conduit à étudier la signification de l'existence de $f \in \mathcal{F}^+(X)$ telle que $\nu * f = 1$.

Lemme 2. Soit F un foncteur mesurable de G dans la catégorie des espaces mesurables usuels, les conditions suivantes sont alors équivalentes, où $X = \bigcup\limits_{x \in G^{(0)}} F(x)$.

a) Il existe $\nu \in \mathcal{E}^+$, $f \in \mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu * f = 1$.

b) $\forall \, \nu \in \mathcal{E}^+$, fidèle, $\exists \, f \in \mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu * f = 1$.

c) Le noyau qui à $z \in X$ associe la mesure ρ^z, où $\rho^z(f) = \int f(\gamma^{-1}z)\, d\nu^y(\gamma)$, est *propre*, pour une ν fidèle.

Démonstration.

c) $\Rightarrow$ a). Soit (A_n) une suite croissante de sous-ensembles mesurables de X, avec $\cup A_n = X$ et $\rho^z(A_n)$ borné pour tout n, alors $f_1 = \sum_n \varepsilon_n\, 1_{A_n}$ pour $\varepsilon_n > 0$ convenable vérifie $(\nu * f_1)(z) > 0$, $\forall\, z$ et $g = \nu * f_1$ bornée. Prenant $f = g^{-1}\, f_1$ on obtient $\nu * f = 1$.

a) $\Rightarrow$ b). Soit ν_0 et soit $f_0 \in \mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu_0 * f_0 = 1$. Il existe $\lambda \in \mathcal{C}^+$ avec $\nu_0 = \nu * \lambda$, on a alors $\nu^*(\lambda * f_0) = 1$.

b) $\Rightarrow$ c). Montrons que l'on peut trouver $f_1 \in \mathcal{F}^+(X)$ avec $\nu * f_1 = 1$ et $f_1(z) > 0$, $\forall\, z$, il suffira alors de prendre $A_n = \{z \in X, f_1(z) \geq 1/n\}$ pour voir que ρ est propre. Soit $k \in \mathcal{F}^+(G)$ vérifiant les conditions suivantes $\nu(\tilde{k}) = 1$, $k(\gamma) > 0$, $\forall\, \gamma \in G$, posons :

$$f_1(z) = \int f(\gamma^{-1}z)\, k(\gamma)\, d\nu^y(\gamma)\,.$$

Comme $\nu * k = 1$ on voit que $f_1(z) > 0$, $\forall\, z$, calculons $\nu * f_1$

$$\begin{aligned}(\nu * f_1)(z) &= \iint f(\gamma^{-1}\, \gamma'^{-1}\, z)\, k(\gamma)\, d\nu^{x'}(\gamma)\, d\nu^y(\gamma') \quad (\text{où } x' = s(\gamma')) \\ &= \iint f(g''^{-1}\, z)\, k(\gamma'^{-1}\, \gamma'')\, d\nu^y(\gamma'')\, d\nu^y(\gamma') = 1\,.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Définition 3. Nous dirons que F est *propre* s'il vérifie les conditions équivalentes du Lemme 2.

Soient F un foncteur mesurable de G dans la catégorie des espaces mesurables usuels et $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} F(x)$, nous dirons par abus de langage que l'action de G sur X est propre ssi F est propre.

Exemple. Le foncteur mesurable L qui à tout $x \in G^{(0)}$ associe G^x et à tout $\gamma \in G$, $\gamma : x \mapsto y$ associe la translation à gauche $\gamma' \mapsto \gamma \cdot \gamma'$ de G^x dans G^y est propre.

Nous étudions maintenant les propriétés d'invariance de l'intégrale $\int F d\Lambda$. Le Lemme 1, 2) permet de se limiter au cas où F est propre. Il est clair que $\int (F_1 \oplus F_2)\, d\Lambda = \int F_1\, d\Lambda + \int F_2\, d\Lambda$.

Proposition 4. Soient F, F' des foncteurs mesurables de G dans la catégorie des espaces mesurables usuels, $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} F(x)$, $X' = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} F'(x)$ et $z \mapsto \lambda^z$ une application mesurable qui à $z \in X$ associe une mesure de probabilité λ^z sur X', portée par $F'(\pi(z))$. On suppose que $\lambda^{\gamma z} = \gamma \lambda^z$, $\forall\, \gamma$, $s(\gamma) = \pi(z)$.

a) Si F' est propre alors F est propre.

b) Si F et F' sont des foncteurs mesurables propres dans la catégorie des espaces mesurés et si pour tout $x \in G^{(0)}$ on a :

$$\int \lambda^z \, d\alpha^x(z) = \alpha'^x \,, \qquad \text{alors} \int F d\Lambda = \int F' d\Lambda \,.$$

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{F}^+(X')$ soit $f * \tilde{\lambda} \in \mathcal{F}^+(X)$ définie par $(f * \tilde{\lambda})(z) = \int f(z') \, d\lambda^z(z')$. On a

$$\begin{aligned} \nu * (f * \tilde{\lambda})(z) &= \iint f(z') \, d\lambda^{\gamma^{-1}z}(z') \, d\nu^y(\gamma) \\ &= \iint f(\gamma^{-1}z') \, d\lambda^z(z') \, d\nu^y(\gamma) = ((\nu * f) * \tilde{\lambda})(z) \,. \end{aligned}$$

Prenant f telle que $\nu * f = 1$, on obtient $\nu * (f * \tilde{\lambda}) = 1 * \tilde{\lambda} = 1$ d'où a).

Pour montrer b) il suffit, avec f comme ci-dessus, de comparer $\alpha'(f)$ et $\alpha(f * \tilde{\lambda})$. Or, $\alpha'^x(f) = \int f(z') \, d\lambda^z(z') \, d\alpha^x(z) = \alpha^x(f * \tilde{\lambda})$. Q.E.D.

Lemme 5. Soit F une variable aléatoire *propre* sur G telle que $\int F d\Lambda = 0$, alors l'ensemble des $x \in G^{(0)}$ pour lesquels $\alpha^x \neq 0$ est saturé Λ-négligeable.

Démonstration. Il existe $\nu \in \mathcal{E}^+$ fidèle et $f_1 \in \mathcal{F}^+(X)$, $X = \cup F(x)$ telles que $f_1(z) > 0$, $\forall \, z \in X$ et $\nu * f_1 = 1$. (Cf. Lemme 2c).) On a $\int F d\Lambda = \Lambda_\nu(\alpha(f_1))$ donc $\alpha^x = 0$ pour Λ_ν presque tout $x \in G^{(0)}$. Comme $\gamma \alpha^x = \delta(\gamma) \, \alpha^y$ l'ensemble $\{x \in G^{(0)}, \alpha^x = 0\}$ est saturé. Q.E.D.

Homomorphisme propre de G dans G'

Rappelons que si G et G' sont des groupes localement compacts et h est un homomorphisme de G dans G' (continu) alors l'application h est propre ssi son noyau est compact et son image est fermée. Cette notion se généralise à notre cadre de la manière suivante :

Définition 6. Soient $(G, \mathcal{B})$ et $(G', \mathcal{B}')$ des groupoïdes mesurables et h un homomorphisme mesurable de G dans G'. Nous dirons que h est *propre* si l'action de G sur $\bigcup_{x \in G^{(0)}} G'^{h(x)}$ donnée par $\gamma' \mapsto h(\gamma)\gamma'$ est propre.

Notons $X = \bigcup_{x \in G^{(0)}} G'^{h(x)}$, il existe par hypothèse pour $\nu \in \mathcal{E}^+$ fidèle, une $f \in \mathcal{F}^+(X)$ telle que $\nu * f = 1$. Vérifions d'abord que si G et G' sont des groupes, on retrouve la notion usuelle. Si $h : G \mapsto G'$ est propre au sens de la Définition 6 l'égalité $\int f(h(\gamma)^{-1}\gamma') \, d\nu(\gamma) = 1$ montre que $K = h^{-1}\{e\}$ est compact car il existe sur G une fonction $\neq 0$, continue, intégrable et invariante à gauche par K. De plus l'image de h est fermée, en effet le quotient de G' par $h(G)$ est dénombrablement séparé grâce à l'application qui à tout $\gamma' \in G'$ associe la mesure de probabilité $\lambda_{\gamma'}$ telle que :

$$\lambda_{\gamma'}(k) = (\nu * fk)(\gamma') \qquad \forall\, k \in \mathcal{F}^+(G')\,.$$

Rappelons que deux homomorphismes h, h' de G dans G' sont dits semblables si il existe une application mesurable θ de $G^{(0)}$ dans G', tel que pour tout x, $\theta(x) : h(x) \mapsto h'(x)$ et que pour $\gamma : x \to y$ on ait $\theta(y)\, h(\gamma) = h'(\gamma)\, \theta(x)$.
On écrit alors $h' = h^\theta$ ou $h' \sim h$.

Proposition 7.

a) Si h est propre et $h' \sim h$ alors h' est propre.

b) Si h_1 et h_2 sont propres $h_1 \circ h_2$ est propre.

c) Si $h_1 \circ h_2$ est propre alors h_2 est propre.

Démonstration.

a) Soient $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} G'^{h(x)}$ et $X' = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} G'^{h'(x)}$.

Pour $z = (x, \gamma') \in X$ avec $r(\gamma') = h(x)$, posons $\varphi(z) = (x, \theta(x)\gamma') \in X'$, par construction φ est une application mesurable qui commute avec l'action de G et qui est bijective car on obtient φ^{-1} en partant de $x \mapsto \theta(x)^{-1}$ au lieu de θ. Le a) résulte donc de la Proposition 4.

b) Partons d'un homomorphisme propre $h : G \mapsto G'$ et d'une action propre de G' sur $X' = \underset{y \in G'^{(0)}}{\cup} X'^y$. Montrons que l'action composée de G sur $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} X'^{h(x)}$ est propre.

Soient $\nu' \in \mathcal{E}'_+$, $f \in \mathcal{F}^+(X')$ avec $\nu' * f = 1$ et $\nu \in \mathcal{E}_+$, $g \in \mathcal{F}^+(Y)$ avec $\nu * g = 1$, où $Y = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} G'^{h(x)}$ correspond à l'action de G sur G'. Définissons une fonction sur X par :

$$k(x, z') = \int f(\gamma'^{-1} z')\, g(x, \gamma')\, d\nu'^{h(x)}(\gamma')$$

où $z' \in X'^{h(x)}$, $r(\gamma') = h(x)$. Montrons que $\nu * k = 1$. Pour $\gamma_1 \in G$, $\gamma_1 : x_1 \to x$, on a

$$k(\gamma_1^{-1}(x, z')) = k(x_1, h(\gamma_1)^{-1} z') = \int f(\gamma^{-1} z')\, g(x_1, h(\gamma_1)^{-1} \circ \gamma)\, d\nu'^{h(x)}(\gamma)\,.$$

Ainsi

$$\int k(\gamma_1^{-1}(x, z'))\, d\nu^x(\gamma_1) = \iint g(x_1, h(\gamma_1)^{-1}\gamma)\, d\nu^x(\gamma_1)\, f(\gamma^{-1} z')\, d\nu'^{h(x)}(\gamma) = 1\,.$$

c) Soient $h : G \to G'$, $h' : G' \to G''$, $\nu \in \mathcal{E}^+$ fidèle et f une fonction sur $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} G''^{h' \circ h(x)}$ telle que $\nu * f = 1$. Soit $Y = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} G'^{h(x)}$ et posons pour $z = (x, \gamma') \in Y$, $k(z) = f(x, h'(\gamma'))$. Cela a un sens car $r(h'(\gamma')) =$

$h'(r(\gamma')) = h'h(x)$. Pour $\gamma_1 \in G$, $\gamma_1 : x_1 \to x$ on a $k(\gamma_1^{-1}z) = k(x_1, h(\gamma_1)^{-1}\gamma') = f(x_1, h'\cdot h(\gamma_1)^{-1}h'(\gamma')) = f(\gamma_1^{-1}z')$ l'égalité $\nu * f = 1$ implique donc que $\nu * k = 1$.
Q.E.D.

Corollaire 8. Soient $(G, \mathcal{B})$ et $(G', \mathcal{B}')$ des groupoïdes mesurables et $h : G \to G'$ une *équivalence* (mesurable) entre G et G' (i.e. il existe $h' : G' \to G$ avec $h' \circ h \sim \mathrm{id}_G$ et $h \circ h' \sim \mathrm{id}_{G'}$. Alors h (et h') est propre.

Démonstration. Il est clair que id_G est propre, on applique alors a) et c).

Exemples.

a) Soit G un groupoïde mesurable *discret*, et soit $G_1 \subset G$ une partie mesurable de G stable par $(\gamma', \gamma) \mapsto \gamma'\gamma$ et $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$. Alors G_1 est un groupoïde mesurable, la fonction transverse caractéristique de $G_1^{(0)}$ est propre, donc G_1 est discret. L'homomorphisme naturel de G_1 dans G est *propre*.

b) *Noyau stable d'un homomorphisme de G dans un groupe localement compact H.*

Soit ψ un homomorphisme mesurable de G dans un groupe localement compact H.

Soit G' le groupoïde $G \times H$, avec $G'^{(0)} = G^{(0)} \times H$, muni de la loi de composition : $(\gamma, t) \circ (\gamma', t') = (\gamma \circ \gamma', t)$, où $r(\gamma, t) = (r(\gamma), t)$ et $s(\gamma, t) = (s(\gamma), t\psi(\gamma))$.

Par construction G' est un groupoïde mesurable et l'application $h : G' \to G$ qui à (γ, t) associe γ est un homomorphisme de G' dans G. Montrons que h est *propre* :

Soit $y' = (y, t) \in G'^{(0)}$, on a $h(y') = y$ et la restriction de h à $G'^{y'}$ est une bijection bimesurable sur G^y. Pour toute fonction transverse $\nu \in \mathcal{E}^+$ sur G, il existe donc une unique fonction transverse $\nu' \in \mathcal{E}'^+$ sur G' telle que

$$h(\nu'^{y'}) = \nu^y \qquad \forall\, y' \in G'^{(0)}\,, \quad y = h(y')\,.$$

L'invariance à gauche du noyau ν' résulte de l'égalité $h(\gamma_1\gamma_2) = h(\gamma_1)\, h(\gamma_2)$, $\forall\, (\gamma_1, \gamma_2) \in G'^{(2)}$, pour vérifier que ν' est propre on peut supposer ν fidèle, et il suffit de trouver une fonction mesurable positive f' sur G' avec $\nu' * f' = 1$; cela montrera aussi la propreté de h. Soit f sur G avec $\nu * f = 1$, alors avec $f' = f \circ h$, on a $\tilde{f}' = \tilde{f} \circ h$, $\nu'^{y'}(\tilde{f}') = \nu^y(\tilde{f}) = 1$ donc $\nu' * f' = 1$.

Pour tout $s \in H$, l'égalité $\theta_s(\gamma, t) = (\gamma, st)$ définit un automorphisme de G'.

Image d'une mesure transverse par un homomorphisme propre de G dans G'

Soient Λ une mesure transverse de module δ sur G et h un homomorphisme propre de G dans G', δ' un homomorphisme de G' dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\delta' \circ h = \delta$.

Nous allons construire sur G' une mesure transverse $\Lambda' = h(\Lambda)$ de module δ'.

Pour tout foncteur mesurable F de G' dans la catégorie des espaces mesurés on obtient par composition avec h un foncteur mesurable h^*F de G dans cette catégorie. De plus, le b) de la proposition montre que si F est propre il en est de même de h^*F. Soit alors ν' une fonction transverse sur G', $\nu' \in \mathcal{E}'^+$ et munissons, pour $x' \in G^{(0)}$, l'espace $G'^{x'}$ de la mesure $\alpha^{x'} = \delta'^{-1}\,\nu'^{x'}$, on obtient ainsi un foncteur $L^{\nu'}$ de G' dans la catégorie des espaces mesurés, on pose :

$$\Lambda'(\nu') = \int h^*(L^{\nu'})\, d\Lambda\,.$$

Proposition 9.

a) $\Lambda' = h(\Lambda)$ est une mesure transverse de module δ' sur G'.

b) Si $h' = h^\theta$ alors $h(\Lambda) = h'(\Lambda)$, si $\delta'(\theta(x)) = 1$, $\forall\, x \in G^{(0)}$.

c) $\int h^*F'\, d\Lambda = \int F'\, d(h\Lambda)$, $\forall\, F'$ propre.

d) $h(\Lambda) = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0$.

Démonstration.

a) Par construction $\Lambda'(\nu') \in [0,\infty]$, $\forall\, \nu' \in \mathcal{E}'_+$, et l'additivité de Λ' résulte du Lemme 1, 3).

De même (Lemme 1, 3)) on vérifie que Λ' est normale. Montrons que Λ' est de module δ'. Soient $\nu', \nu'' \in \mathcal{E}'_+$ et $\lambda \in \mathcal{C}'$ avec $\lambda'^{x'}(1) = 1$, $\forall\, x' \in G'^{(0)}$ et $\nu' * \delta'\lambda' = \nu''$. Soit $X = \underset{x \in G^{(0)}}{\cup} G'^{h(x)}$ l'espace mesurable associé au foncteur h^*L et considérons l'application mesurable qui à tout $z \in X$ associe la mesure de probabilité λ^z sur $\pi^{-1}(\pi(z)) \subset X$ qui pour $z = (x,\gamma')\, x' = s(\gamma')$ vaut $(x, \gamma'\lambda'^{x'})$. Par construction λ commute avec l'action de G. L'égalité $\delta'^{-1}\nu' * \lambda' = \delta'^{-1}\nu''$ et la Proposition 4 b) montrent donc que

$$\int h^*(L^{\nu'})\, d\Lambda = \int h^*(L^{\nu''})\, d\Lambda\,.$$

b) Reprenons les notations de la Proposition 7, et soit $\nu' \in \mathcal{E}'_+$. Pour tout $x \in G^{(0)}$ l'image par φ de la mesure $\delta'^{-1}\,\nu'^{h(x)}$ sur $G'^{h(x)}$ est égale à $\delta'^{-1}\,\nu'^{h'(x)}$ car $\delta' \circ \theta = 1$. Ainsi la Proposition 4 b) montre que $\int h^*L^{\nu'}\, d\Lambda = \int h'^*L^{\nu'}\, d\Lambda$ d'où b).

c) Reprenons les notations de la Proposition 7, avec $F = h^*F'$. Soit α'^y la mesure sur $X'^y = F'(y)$ et notons α^x la mesure $\alpha'^{h(x)}$ sur $X^x = F(x) = F'(h(x))$. On doit comparer $\Lambda_\nu(\alpha(k))$ et $\Lambda'_{\nu'}(\alpha'(f)) = \Lambda'((\alpha'(f) \circ s)\nu') = \int h^*L^{\nu''}\, d\Lambda$ où $\nu'' = (\alpha'(f) \circ s)\nu'$, ainsi :

$$\Lambda'_{\nu'}(\alpha'(f)) = h\,\Lambda_\nu(\nu''(g)) = \Lambda_\nu(\nu'((\alpha'(f) \circ s)g) \circ h)\,.$$

Soit $x \in G^{(0)}$ comparons $\alpha^x(k)$ et $\nu'^{h(x)}((\alpha'(f) \circ s)g)$. On a

$$\begin{aligned} \alpha^x(k) &= \iint f(\gamma'^{-1}z')\, g(x,\gamma')\, d\nu'^{h(x)}(\gamma')\, d\alpha'^{h(x)}(z') \\ &= \iint f(z'')\, d\alpha'^{x'}(z'')\, g(x,\gamma')\, d\nu'^{h(x)}(\gamma') \end{aligned}$$

où $x' = s(\gamma')$, ce qui coïncide bien avec $\nu'^{h(x)}((\alpha'(f)\circ s)g)$.
d) Résulte facilement du Lemme 5, avec $F = h^* L^{\nu'}$ où $\nu' \in \mathcal{E}'_+$ est fidèle.

Q.E.D.

Exemples.

1) Soient $\Gamma \subset H$ un sous-groupe discret du groupe localement compact H et h l'injection canonique de Γ dans H, Λ la mesure transverse naturelle sur Γ. Alors $h(\Lambda)$ est la mesure transverse sur H qui à toute mesure de Haar à gauche ν sur H associe le covolume $\nu(\Gamma\backslash H)$ de Γ dans H.

2) Soient $X, H, G = X\times H$ et δ comme dans le Corollaire 2.7. L'homomorphisme canonique h de $X\times H$ dans H, associée à la deuxième projection est propre. La condition $\Delta_H\circ h = \delta$ étant supposée, on voit qu'un choix de mesure de Haar à gauche dk sur H fixe une bijection entre mesures H invariantes sur X et mesures transverses Λ de module δ sur G. L'image $h(\Lambda)$ est la mesure transverse sur H qui à dk associe la masse totale de μ avec les notations du Corollaire 2.7.

Mesures transverses sur $G\times_\theta H$

Soient $(G,\mathcal{B})$ un groupoïde mesurable et θ une action mesurable du groupe localement compact H par automorphisme de $(G,\mathcal{B})$. Soit $G_1 = G\times_\theta H$ le produit semidirect de G par H, comme espace mesurable on a $G_1 = G\times H$, $G_1^{(0)} = G^{(0)}$, $r(\gamma,t) = r(\gamma)$, $s(\gamma,t) = s(\gamma)\,t = \theta_t^{-1}(s(\gamma))$ et $(\gamma_1,t_1)\circ(\gamma_2,t_2) = (\gamma_1\,\theta_{t_1}(\gamma_2), t_1\,t_2)$ si $s(\gamma_1) = \theta_{t_1}(r\,\gamma_2)$.
Soient dt une mesure de Haar à gauche sur H et ν une fonction transverse sur G, $\nu\in\mathcal{E}^+$. L'identification évidente de G_1^y avec $G^y\times H$, pour $y\in G^{(0)}$, définit ainsi une fonction transverse $\nu_1 = \nu\times dh$ sur G_1. Soient Λ une mesure transverse sur G et δ son module. On suppose que $\delta\circ\theta_t = \delta$, $\forall\, t\in H$ et qu'il existe une application de H dans l'ensemble des fonctions mesurables de $G^{(0)}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ constantes sur les classes de $G^{(0)}$ avec :

$$\theta_t(\Lambda) = \varphi_t\,\Lambda \quad \forall\, t\in H\,, \qquad \varphi_{s+t} = \varphi_s\cdot\varphi_t\circ\theta_s^{-1} \quad \forall\, s,t\in H\,.$$

Pour $(\gamma,t)\in G_1$ posons $\delta_1(\gamma,t) = \Delta_H^{-1}(t)\,\varphi_t(s(\gamma))\,\delta(\gamma)$. Alors δ_1 est un homomorphisme de G_1 dans $\mathbb{R}_+^*$ et il existe une unique mesure transverse Λ_1 sur G_1, de module δ_1, telle que $\forall\,\nu\in\mathcal{E}^+$ on ait :

$$(\Lambda_1)_{\nu_1} = \Lambda_\nu\,.$$

Décomposition d'un homomorphisme de G **dans un groupe localement compact** H ([12], [46])

Soient $\psi : G\to H$ un homomorphisme de G dans H, et Λ une mesure transverse de module δ sur G.
Soient G' le noyau stable de ψ et $h : G'\to G$ l'homomorphisme propre canonique (exemple b)). Posons

$$\delta'(\gamma,t) = \delta(\gamma)\,\Delta_H(\psi(\gamma))\,, \qquad \forall\,(\gamma,t)\in G'\,.$$

Soit dt une mesure de Haar à gauche sur H, il existe alors sur G' une unique mesure transverse Λ' de module δ', telle que pour toute $\nu \in \mathcal{E}^+$ on ait :

$$\Lambda'_{\nu'} = \Lambda_\nu \times dt \quad \text{sur} \quad G'^{(0)} = G^{(0)} \times H\,.$$

En effet, pour $\nu \in \mathcal{E}^+$, $\mu = \Lambda_\nu$ on a :

$$\begin{aligned}\iiint f(\gamma,t)\,d\nu^y(\gamma)\,d\mu(y)\,dt &= \iiint f(\gamma^{-1},t)\,\delta(\gamma)\,d\nu^y(\gamma)\,d\mu(y)\,dt\\ &= \iiint f((\gamma,t)^{-1})\,\delta(\gamma)\,\Delta_H(\psi(\gamma))\,d\nu^y(\gamma)\,d\mu(y)\,dt\,.\end{aligned}$$

Car $(\gamma,t)^{-1} = (\gamma^{-1}, t\psi(\gamma))$. L'existence de Λ' résulte donc du Théorème 3 car si $\nu_1 = (k\circ s)\nu$ on a $\nu'_1 = (k\circ h)\circ s\,\nu'$ ce qui est compatible avec l'égalité $\Lambda'_{\nu'_1} = (k\circ h)\,\Lambda'_{\nu'}$.

Par construction la mesure Λ' sur G' est invariante par l'action canonique θ de H sur G', $\theta_s(\gamma,t) = (\gamma, st)$.

Le paragraphe précédent montre donc l'existence d'une mesure transverse canonique Λ'_1 sur $G' \times_\theta H$, dont le module δ'_1 est donné par l'égalité :

$$\delta'_1(\gamma',t) = \Delta_H(t)^{-1}\,\delta'(\gamma')\,.$$

Proposition 10. Soient $G, H, \psi, G', h, \theta$ comme ci-dessus et I le groupoïde mesurable $H\times H$ avec $(H\times H)^{(0)} = H$, r et s étant les deux projections. Alors l'application k de $G'_1 = G' \times_\theta H$ dans $G \times I$ qui à (γ', t_1) où $\gamma' = (\gamma, t)$ associe $\gamma, t, t_1^{-1}\,t\psi(\gamma))$ est un isomorphisme de G'_1 sur $G\times I$. Soit Λ_I la mesure transverse de module $\delta_I, \delta_I(t_1,t_2) = \Delta_H(t_1^{-1}\,t_2)$ sur I, image de la mesure unité sur le groupoïde à un élément e par l'application qui l'envoie sur l'unité de H. Alors pour toute mesure transverse Λ de module δ sur G, l'image par k de la mesure transverse Λ'_1 sur G'_1 est égale à $\Lambda \times \Lambda_I$.

Démonstration. On a :

$$r(\gamma',t_1) = r(\gamma') = (r(\gamma),t)\,,\ s(\gamma',t_1) = \theta_{t_1}^{-1}\,s(\gamma') = (s(\gamma), t_1^{-1}\,t\psi(\gamma))$$

dans G'_1.

Dans $G\times I$ on a $r(\gamma,t,t') = (r(\gamma),t)$ et $s(\gamma,t,t') = (s(\gamma),t')$, on vérifie donc la compatibilité de r et s avec l'égalité $k(x,t) = (x,t)$, $\forall\,(x,t) \in G_1'^{(0)}$. La multiplicativité de k est alors immédiate, ainsi que sa surjectivité. On a $\delta'_1(\gamma',t_1) = \Delta_H(t_1)^{-1}\,\Delta_H(\psi(\gamma))\,\delta(\gamma)$, donc comme $\Delta_H(t^{-1}\,t_1^{-1}\,t\psi(\gamma)) = \Delta_H(t_1^{-1})\,\Delta_H(\psi(\gamma))$, on voit que $(\delta\times\delta_I)\circ k = \delta'_1$. Vérifions que $k(\Lambda'_1) = \Lambda \times \Lambda_I$. Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse fidèle sur G et soit dt une mesure de Haar à gauche sur H. Soient ν' et $\nu'_1 = \nu' \times dt$ les fonctions transverses correspondantes sur G' et G'_1, on a $\Lambda'_{\nu'} = \mu \times dt$ où $\mu = \Lambda_\nu$ et $(\Lambda'_1)_{\nu'_1} = \mu \times dt$ sur $G_1'^{(0)}$. Ici, k est un isomorphisme, et il transporte ν'_1 en la fonction transverse $\nu \times dt$ sur $G\times I$ la vérification est donc immédiate. Q.E.D.

5 Représentations de carré intégrable de G

Soient G un groupoïde mesurable, H un champ mesurable d'espaces hilbertiens, de base $G^{(0)}$. (Cf. [31].)

Définition 1. On appelle *représentation* de G dans H la donnée pour tout $\gamma \in G$, $\gamma : x \to y$ d'une isométrie $\cup(\gamma)$ de H_x sur H_y avec :

a) $\cup(\gamma_1^{-1}\,\gamma_2) = \cup(\gamma_1)^{-1}\,\cup(\gamma_2) \quad \forall\,\gamma_1,\gamma_2 \in G\,,\ r(\gamma_1) = r(\gamma_2)$.

b) Pour tout couple ξ, η de sections mesurables de H, la fonction (ξ,η) sur G ainsi définie est mesurable :

$$(\xi,\eta)(\gamma) = \langle \xi_y, \cup(\gamma)\,\eta_x\rangle \qquad \forall\,\gamma : x \to y\,.$$

Soient ξ une section mesurable bornée de H et $y \in G^{(0)}$. L'application $\gamma \mapsto \cup(\gamma)\,\xi_x$ de G^y dans H_y est mesurable bornée. Ainsi pour tout noyau borné λ sur G on peut poser $(\cup(\lambda)\,\xi)_y = \int \cup(\gamma)\,\xi_x\,d\lambda^y(\gamma)$.

Il est clair que $\cup(\lambda)\,\xi$ est une section bornée de H, elle est mesurable car, pour toute section bornée mesurable η de H

$$\langle \eta_y, (\cup(\lambda)\,\xi)_y\rangle = \int_{G^y} \langle \eta_y, \cup(\gamma)\,\xi_x\rangle\,d\lambda^y(\gamma) = \lambda((\eta,\xi))$$

et la fonction (η,ξ) est mesurable bornée par hypothèse.

Proposition 2.

a) Soient ξ, η des sections mesurables bornées de H, et λ un noyau borné sur G, on a :

$$(\eta,\xi) = (\xi,\eta)^v\,,\ (\cup(\lambda)\,\xi,\eta) = \lambda * (\xi,\eta)\,,\ (\xi,\cup(\lambda)\,\eta) = (\xi,\eta) * \lambda^v\,.$$

b) Soient λ un noyau propre (positif) sur G, tel que $\lambda^y \neq 0$ si $H_y \neq \{0\}$, D un ensemble dénombrable de fonctions mesurables f sur G telles que $\mathrm{Sup}\,\lambda(|f|)$ soit fini $\forall\,f \in D$, et que D soit total dans $L^1(G^y,\lambda^y)$, $\forall\,y \in G^{(0)}$.

Alors, pour tout ensemble dénombrable S, total, de sections mesurables bornées de H, $\{\cup(f\lambda)\,\xi,\ f \in D,\ \xi \in S\}$ est aussi total.

Démonstration.

a) On a $(\eta,\xi)(\gamma) = \langle \eta_y, \cup(\gamma)\,\xi_x\rangle = \langle (\cup(\gamma)^{-1}\,\eta_y, \xi_x\rangle = (\langle \xi_x, \cup(\gamma^{-1})\,\eta_y\rangle)^{-1}$. De même,

$$\begin{aligned}(\lambda * (\xi,\eta))(\gamma) &= \int \langle \xi_y, \cup(\gamma'^{-1}\,\gamma)\,\eta_x\rangle\,d\lambda^y(\gamma') \\ &= \int \langle \cup(\gamma')\,\xi_x,\,\cup(\gamma)\,\eta_x\rangle\,d\lambda^y(\gamma') = (\cup(\lambda)\,\xi,\eta)(\gamma)\,.\end{aligned}$$

b) Soient $y \in G^{(0)}$ et $\eta \in H_y$ tels que $\langle \eta, (\cup(f\lambda)\,\xi)_y\rangle = 0$, $\forall\,f \in D$, $\forall\,\xi \in S$. On a $\int f(\gamma)\,\langle \eta, \cup(\gamma)\,\xi_x\rangle\,d\lambda^y(\gamma) = 0$, $\forall\,f \in D$, donc $N_\xi = \{\gamma \in G^y, \langle \eta, \cup(\gamma)\,\xi_x\rangle \neq 0\}$ est λ^y-négligeable pour tout $\xi \in S$. Si $H_y \neq \{0\}$ on a $\lambda^y \neq 0$ donc il existe $\gamma \in (\cup N_\xi)^c$. On a alors $\langle \eta, \cup(\gamma)\,\xi_x\rangle = 0$, $\forall\,\xi \in S$ et donc $\cup(\gamma)^{-1}\,\eta = 0$ d'où $\eta = 0$. Q.E.D.

Opérateurs d'entrelacement

Soient $(H, \cup)$, $(H', \cup')$ deux représentations de G.

Par définition, un *opérateur d'entrelacement* T est une famille mesurable $(T_x)_{x \in G^{(0)}}$ d'opérateurs bornés $T_x : H_x \to H'_x$ telle que :

1) $\mathrm{Sup}\, \|T_x\| < \infty$

2) $\forall\, \gamma \in G$, $\gamma : x \to y$ on a $\cup'(\gamma)\, T_x = T_y \cup(\gamma)$.

Pour toute section mesurable ξ de H, on note T_ξ la section mesurable $(T_x\, \xi_x)_{x \in G^{(0)}}$.

Nous noterons $\mathrm{Hom}_G(H, H')$ l'espace vectoriel normé des opérateurs d'entrelacement de H à H'.

Proposition 3.

a) Si $T_1 \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$, $T_2 \in \mathrm{Hom}_G(H', H'')$, alors $T_2 \circ T_1 = (T_{2_x}\, T_{1_x})_{x \in G^{(0)}}$ appartient à $\mathrm{Hom}_G(H, H'')$.

b) Si $T \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$ soit $T_x = v_x |T_x|$ la décomposition polaire de T_x alors $v = (v_x) \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$ et $|T| \in \mathrm{End}_G(H)$.

c) Soit $T \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$, pour tout noyau borné λ et toute section mesurable bornée ξ de H on a :

$$\cup'(\lambda)\, T\xi = T \cup(\lambda)\, \xi\, .$$

d) Pour tout $x \in G^{(0)}$, soit $E_x \subset H_x$ un sous-espace vectoriel fermé de H_x et P_x le projecteur orthogonal associé. On suppose que $\cup(\gamma)\, P_x = P_y \cup(\gamma)$, $\forall\, \gamma : x \to y$. Pour que la restriction de $\cup$ à E soit une représentation de G il faut et il suffit que $x \to P_x$ soit mesurable.

e) Soient $P_1, P_2 \in \mathrm{End}_G(H)$ des projecteurs, et P_3, P_4 les projecteurs

$$(P_3)_x = P_{1_x} \vee P_{2_x} - P_{1_x} \qquad (P_4)_x = P_{2_x} - P_{1_x} \wedge P_{2_x}\, ,$$

$\forall\, x \in G^{(0)}$. Alors $P_3, P_4 \in \mathrm{End}_G(H)$ et les sous-représentations associées sont équivalentes.

a) La mesurabilité de $x \mapsto T_x$ équivaut à la mesurabilité des sections $(T_x\, \xi_x)_{x \in G^{(0)}}$, pour toute section mesurable bornée ξ de H.

b) On écrit $(v\, \xi)_x = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_x(\varepsilon + T_x^*\, T_x)^{-\frac{1}{2}}\, \xi_x$ pour toute section mesurable bornée ξ de H.

c) $(\cup'(\lambda)\, T\xi)_y = \displaystyle\int \cup(\gamma)\, T_x\, \xi_x\, d\lambda^y(\gamma) = \int T_y \cup(\gamma)\, \xi_x\, d\lambda(\gamma) = T_y(\cup(\lambda)\, \xi)_y\, .$

d) Supposons d'abord P mesurable, soit (ξ_n) un ensemble dénombrable total de sections mesurables de H, alors les $P\xi_n$ forment un ensemble analogue pour le champ E.

Réciproquement, soit (ξ_n) un ensemble orthonormal total de sections mesurables de E, alors $P_x\, \eta = \Sigma\, \langle \eta, \xi_n(x) \rangle\, \xi_n(x)$, $\forall\, \eta \in H_x$, ce qui montre la mesurabilité de P.

e) $P_1 \vee P_2$ et $P_1 \wedge P_2$ sont mesurables (b), il suffit alors de prendre comme équivalence entre P_3 et P_4 l'isométrie partielle $v = (v_x)_{x \in G^{(0)}}$ de la décomposition polaire de $P_2(1 - P_1)$. Q.E.D.

Sous-représentations associées à une section mesurable bornée

Soient (H, U) une représentation de G, ξ une section mesurable bornée de H et pour $y \in G^{(0)}$, soit P_y^ξ le projecteur orthogonal de H_y sur le sous-espace fermé engendré par les $\cup(\gamma)\,\xi_x$, $\gamma \in G^y$. En général $P^\xi = (P_y^\xi)$ n'est pas mesurable. La proposition suivante montre qu'il existe toujours assez de sections mesurables bornées ξ pour lesquelles P^ξ est mesurable.

Proposition 4.

a) Soient $(H, \cup)$ et ξ comme ci-dessus, $\nu \in \mathcal{E}^+$ et pour $y \in G^{(0)}$, $P_y^{\nu,\xi}$ le projecteur orthogonal de H_y sur $\{\cup(f\nu)\,\xi)_y,\, \nu|f| \text{ borné}\}^{-1}$, alors $P^{\nu,\xi}$ est mesurable, $P^{\nu,\xi} \in \mathrm{End}_G(H)$.

b) Soit $\xi' = P^{\nu,\xi}(\xi)$, alors pour tout $y \in G^{(0)}$ on a $\xi_x = \xi'_x$, $s(\nu^y)$ presque sûrement, de plus $P^{\nu,\xi} = p^{\nu,\xi'} = P^{\xi'}$.

c) Soit (ξ_n) une suite totale de sections mesurables bornées, il existe alors $A_n \in \mathrm{End}_G(H)$, tels qu'avec $\eta_n = A_n\,\xi_n$, chacun des projecteurs P^{η_n} soit mesurable et $\Sigma\, P^{\eta_n} = 1$.

Démonstration.

a) Soit D un ensemble dénombrable de fonctions mesurables sur G vérifiant les conditions de la Proposition 2 b) relativement à ν, alors $\{\cup(f\nu)\,\xi, f \in D\}$ est un ensemble dénombrable de sections mesurables bornées de H qui engendre l'image de $P_x^{\nu,\xi}$ dans H_x, $\forall\, x \in G^{(0)}$.

b) On a $P_y^{\nu,\xi}(\cup(f\nu)\,\xi)_y = (\cup(f\nu)\,\xi')_y$ d'où

$$\int f(\gamma)\cup(\gamma)\,\xi_x\,d\nu^y(\gamma) = \int f(\gamma)\cup(\gamma)\,\xi'_x\,d\nu^y(\gamma)$$

pour toute f avec $\nu|f|$ bornée.
Cela montre que $\xi_x = \xi'_x\; s(\nu^y) - p\cdot s$. Ainsi on a $P^{\nu,\xi'} = P^{\nu,\xi}$, or $P^{\xi'} \le P^{\nu,\xi}$ car $P^{\nu,\xi}(\xi') = \xi'$.
Comme $P^{\nu,\xi'} \le P^{\xi'}$ on obtient l'égalité recherchée.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $Q_n = P^{\nu,\xi_n}$ où $\nu \in \mathcal{E}^+$ est fidèle. La Proposition 2 b) montre que pour tout $x \in G^{(0)}$ on a $\vee\, Q_{n_x} = 1$. Posons $Q'_n = \overset{n}{\underset{1}{\vee}}\, Q_j$, on a $Q'_n \le Q'_{n+1}$ et $\vee\, Q'_n = 1$. Ainsi $P_n = Q'_n - Q'_{n-1}$ détermine une suite de projecteurs $P_n \in \mathrm{End}_G(H)$ avec $\Sigma\, P_n = 1$. Il s'agit de trouver $A_n \in \mathrm{End}_G(H)$ avec $P_n = P^{\nu, A_n \xi_n} = P^{P_n A_n \xi_n}$. La Proposition 3 e) permet alors de remplacer $P_n = Q'_{n-1} \vee Q_n - Q'_{n-1}$ par $P'_n = Q_n - Q_n \wedge Q'_{n-1}$. On a alors $P'_n \le Q_n = P^{\nu,\xi_n}$ donc $P'_n = p^{\nu, P'_n \xi_n}$ d'où le résultat. Q.E.D.

Représentations régulières gauches de G

Notons $L^1(G)$ l'ensemble des triplets (ν', ν, f) où $\nu', \nu \in \mathcal{E}_+$, f est une fonction mesurable sur G telle que $\|(\nu', \nu, f)\| = \mathrm{Sup}(\nu|f|, \nu'|f|) < \infty$. Pour $(\nu', \nu, f) \in L^1(G)$ on a $(\nu, \nu', \tilde{f}) \in L^1(G)$ et la norme est inchangée. Pour $(\nu'', \nu', f') \in$

$L^1(G)$ et $(\nu', \nu, f) \in L^1(G)$ on pose $(\nu'', \nu', f') * (\nu', \nu, f) = (\nu'', \nu, f' \nu'^* f)$ et on vérifie que $\|(\nu'', \nu', f') * (\nu', \nu, f)\| \le \|(\nu'', \nu', f')\| \, \|(\nu', \nu, f)\|$. L'égalité $(\nu', \nu, f)^\sim = (\nu, \nu', \tilde f)$ définit une *involution* isométrique de $L^1(G)$.

Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse sur G. Pour tout $y \in G^{(0)}$, $L^2(G^y, \nu^y) = H_y$ est un espace hilbertien et pour $\gamma : x \mapsto y$ la translation à gauche $L(\gamma)$ définie par

$$(L(\gamma) f)(\gamma') = f(\gamma^{-1} \gamma') \qquad \forall \gamma' \in G^y$$

nous donne une isométrie de $L^2(G^x, \nu^x)$ sur $L^2(G^y, \nu^y)$. Munissons le champ $H = (H_y)_{y \in G^{(0)}}$ de l'unique structure mesurable pour laquelle les sections suivantes sont mesurables : $y \mapsto$ (restriction de f à G^y), où f est une fonction mesurable sur G avec $\int |f|^2 \, d\nu^y < \infty$, $\forall \, y$. On obtient ainsi une représentation de G que nous noterons L^ν, dans $H = L^2(G, \nu)$.

Proposition 5.

a) Pour toute section mesurable $\xi = (\xi_y)_{y \in G^{(0)}}$ de H, il existe une fonction mesurable f sur G telle que $\xi_y = f \mid G^y$, $\forall \, y \in G^{(0)}$.

b) Pour f comme dans a) et $\lambda \in \mathcal{C}$ on a $\lambda * f = L(\lambda) f$.

c) Pour f_1, f_2 comme ci-dessus on a $(f_1, f_2) = f_1 \, \nu * f_2 \, \nu$.

Démonstration.

a) Comme ν est propre, on peut supposer qu'il existe $A \subset G$ mesurable, tel que pour tout $y \in G^{(0)}$, ξ_y soit nul dans A^c et que $\operatorname{Sup} \nu^y(A) < \infty$. Soit alors $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions finies de A, croissante, engendrant la tribu $\mathcal{B}$ sur A. Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction k_n sur G en posant $k_n(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin A$, $k_n(\gamma) = \nu^y(b)^{-1} \int_b \xi_y \, d\nu^y$ si l'atome b de B_n contenant γ vérifie $\nu^y(b) \neq 0$, et $k_n(\gamma) = 0$ sinon. On pose alors $f(\gamma) = \lim\limits_{n \to \infty} k_n(\gamma)$ si la suite converge et $f(\gamma) = 0$ sinon.

b) Immédiat.

c) On a

$$(f_1, f_2)(\gamma) = \langle f_1^y, L(\gamma) \, f_2^x \rangle \int f_1(\gamma') \, \overline{f_2(\gamma^{-1} \gamma')} \, d\nu^y(\gamma') = f_1 \, \nu * f_2^v \, .$$

Passons maintenant à l'analogue de la représentation de L^1 d'un groupe localement compact par convolutions à droite dans L^2.

Proposition 6.

a) Soit $(\nu', \nu, f) \in L^1(G)$, alors l'égalité $R_\nu^{\nu'}(f)_{y^\alpha} = \alpha * (f\nu)^\sim$, $\forall \, \alpha \in L^2(G^y, \nu^y)$ définit un opérateur (borné par $\|(\nu', \nu, f)\|$) de $L^2(G^y, \nu^y)$ à $L^2(G^y, \nu'^y)$.

b) La famille $(R_\nu^{\nu'}(f)_y)_{y \in G^{(0)}}$ est un opérateur d'entrelacement de $L^2(G, \nu)$ à $L^2(G, \nu')$.

c) On a $(R_\nu^{\nu'}(f))^* = R_{\nu'}^{\nu}(f^v)$ et $R_\nu^{\nu''}(k\nu' * f) = R_{\nu'}^{\nu''}(k) \, R_\nu^{\nu'}(f)$.

d) Soient $x \in G^{(0)}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur G avec $|f_n| \leq g$, $\forall n$, où $(\nu, \nu, g) \in L^1(G)$, telle que $f_n(\gamma^{-1}\gamma')$ converge vers $f(\gamma^{-1}\gamma')$, $\nu^x \times \nu^x$ presque partout. Alors $R^\nu_\nu(f_n)_x \to R^\nu_\nu(f)_x$ faiblement.

Démonstration.
a) Pour $\gamma_1, \gamma_2 \in G^y$, posons $k(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1^{-1}\gamma_2)$, l'égalité $(Tq)(\gamma_1) = \int k(\gamma_1, \gamma_2)\, q(\gamma_2)\, d\nu^y(\gamma_2)$ définit un opérateur de $L^2(G^y, \nu^y)$ dans $L^2(G^y, \nu'^y)$ dont la norme est majorée par

$$\operatorname{Sup}\left(\operatorname*{Sup}_{\gamma_1} \int |k(\gamma_1, \gamma_2)|\, d\nu^y(\gamma_2)\,,\ \operatorname*{Sup}_{\gamma_2} \int |k(\gamma_1, \gamma_2)|\, d\nu'^y(\gamma_1)\right)$$

on obtient donc l'estimation a) (cf. [32]).

b) Les translations à gauche et à droite commutent.

c) Avec les notations de a) l'adjoint de T est donné par $\overline{k(\gamma_2, \gamma_1)} = \overline{f(\gamma_2^{-1}\gamma_1)} = f^v(\gamma_1^{-1}\gamma_2)$. La dernière égalité résulte de l'associativité dans G.

d) Pour $\xi, \eta \in L^2(G^x, \nu^x)$ on a :

$$\langle R^\nu_\nu(f_n)_x\, \xi, \eta\rangle = \iint f_n(\gamma^{-1}\gamma')\, \xi(\gamma')\, \overline{\eta(\gamma)}\, d\nu^x(\gamma)\, d\nu^x(\gamma')\,,$$

où

$$\iint g(\gamma^{-1}\gamma')\, |\xi(\gamma')|\, |\eta(\gamma)|\, d\nu^x(\gamma)\, d\nu^x(\gamma') < \infty\,.$$

Q.E.D.

Notons enfin la propriété suivante des représentations régulières de G :

Proposition 7. Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$ et L la représentation correspondante de G, alors pour toute représentation V de G dans H avec $H_x \neq 0$, $\forall x \in G^{(0)}$, la représentation L est équivalente à une sous-représentation de $L \otimes V$.

Démonstration. Pour tout $n \in \{1, \ldots, \infty\}$ soit 1_n un espace hilbertien de dimension n. Soit V' la représentation triviale de G dans H' où H'_x est l'espace 1_n de même dimension que H_x pour tout $x \in G^{(0)}$. Il nous suffit de montrer que $L \otimes V$ est équivalente à $L \otimes V'$. Soit $K = s^* H$ le champ d'espaces de Hilbert sur G tel que $K_\gamma = H_{s(\gamma)}$, identifions $L^2(G^y, \nu^y) \otimes H_y$ avec l'espace $L^2(G^y, \nu^y, K)$ des sections de carré sommable de K par

$$f \otimes \eta \in L^2(G^y, \nu^y) \otimes H_y \mapsto (\gamma \mapsto f(\gamma)\, V(\gamma)^{-1}\, \eta)\,.$$

Cette identification transforme $L(\gamma) \otimes V(\gamma)$ en la translation à gauche par γ de $L^2(G^x, \nu^x, K)$ dans $L^2(G^y, \nu^y, K)$. Q.E.D.

Représentation de carré intégrable

Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$ et U une représentation de G dans H. La condition suivante définit un sous-espace vectoriel de l'espace des sections mesurables bornées de H :

$$D(U,\nu) = \{\xi, \exists\, c > 0,\ \text{avec} : \forall\, y \in G^{(0)},\ \forall\, \alpha \in H_y$$

$$\int |\langle \alpha, U(\gamma)\,\xi_x\rangle|^2\, d\nu^y(\gamma) \leq c^2 \|\alpha\|^2\}\,.$$

Ainsi, pour $\xi \in D(U,\nu)$ et toute section mesurable bornée η de H, le coefficient (η,ξ) est une section mesurable bornée de $(L^2(G^y,\nu^y))_{y\in G^{(0)}}$.

Proposition 8.

a) Soit $\xi \in D(U,\nu)$, l'égalité suivante définit un opérateur d'entrelacement entre U et la représentation régulière gauche L^ν :

$$T_\nu(\xi)\,\alpha = (\alpha,\xi) \qquad \forall\, \alpha \text{ section mesurable bornée de } H\,.$$

b) Soit f une section mesurable bornée de $(L^2(G^y,\nu^y))_{y\in G^{(0)}}$ avec $\nu|f|$ borné, alors :

$$T_\nu(\xi)^*\, f = U(f\nu)\,\xi \qquad \forall\, \xi \in D(U,\nu)\,.$$

c) Soient U, U' des représentations de G et A un opérateur d'entrelacement de U à U' alors $A\,\xi \in D(U',\nu)$, $\forall\, \xi \in D(U,\nu)$ et $T_\nu(A\,\xi) = T_\nu(\xi)A^*$.

d) Soit ξ une section mesurable bornée de H, soient $\nu,\nu' \in \mathcal{E}^+$ tels que $(\nu',\nu,(\xi,\xi)) \in L^1(G)$, alors $\xi \in D(U,\nu)\cap D(U,\nu')$ et $T_{\nu'}(\xi)\,T_\nu(\xi)^* = R_\nu^{\nu'}((\xi,\xi)^\sim)$.

e) Soient $\xi \in D(U,\nu)$, $(\nu',\nu,f) \in L^1(G)$. Alors $U(f\nu)\,\xi \in D(U,\nu')$ et $T_{\nu'}(U(f\nu)\,\xi) = R_\nu^{\nu'}(\overline{f})\,T_\nu(\xi)$.

f) Pour $\xi,\eta \in D(U,\nu)$, l'égalité $\theta_\nu(\xi,\eta) = T_\nu(\xi)^*\,T_\nu(\eta)$ définit un opérateur d'entrelacement de U à U, et :

$$(\theta_\nu(\xi,\eta)\,\xi',\eta') = (\xi',\eta) *_\nu (\eta',\xi)^v$$

pour toutes sections mesurables bornées ξ',η' de H.

Démonstration.

a) L'opérateur $T_\nu(\xi)_y : H_y \to L^2(G^y,\nu^y)$ associe à tout $\alpha \in H_y$ la fonction $\gamma \mapsto \langle \alpha, U(\gamma)\,\xi_x\rangle$ sur G^y, de sorte que par hypothèse on a $\|T_\nu(\xi)_y\| \leq c$. Pour $\gamma : x \to y$ on a $\langle U(\gamma)\,\alpha, U(\gamma')\,\xi_{x'}\rangle = \langle \alpha, U(\gamma^{-1}\,\gamma')\,\xi_{x'}\rangle$ ce qui montre que $T_\nu(\xi)$ est un opérateur d'entrelacement.

b) Pour $\alpha \in H_y$ on a :

$$\langle T_\nu(\xi)_y\,\alpha, f\rangle = \int \langle \alpha, U(\gamma)\,\xi_x\rangle\,\overline{f(\gamma)}\,d\nu^y(\gamma) = \left\langle \alpha, \int f(\gamma)\,U(\gamma)\,\xi_x\,d\nu^y(\gamma)\right\rangle\,.$$

c) Pour toute section mesurable bornée α' de H' on a :

$$(\alpha', A\xi) = (A^*\alpha',\xi)$$

d'où le résultat.

d) Pour f comme dans b) on a :

$$T_{\nu'}(\xi)(T_\nu(\xi)^* f) = T_{\nu'}(\xi)(U(f\nu)\xi) = L(f\nu)\, T_{\nu'}(\xi)\xi = f\nu^*(\xi,\xi) = R_\nu^{\nu'}((\xi,\xi)^\sim)f\,.$$

e) Soit η une section mesurable bornée de H, on a :

$$T_{\nu'}(U(f\nu)\xi)\eta = (\eta, U(f\nu)\xi) = (\eta,\xi) * (f\nu)^v = R_\nu^{\nu'}(\overline{f})(\eta,\xi) = R_\nu^{\nu'}(\overline{f})\, T_\nu(\xi)\eta\,.$$

f) On a

$$(\theta_\nu(\xi,\eta)\,\xi',\eta') = (T_\nu(\eta)\xi', T_\nu(\xi)\eta') = ((\xi',\eta),(\eta',\xi)) = (\xi',\eta) *_\nu (\eta',\xi)^v$$

(Proposition 5c)).

Corollaire 9. Pour tout $\nu \in \mathcal{E}^+$, soit $\mathcal{J}_\nu$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_G(H)$ engendré par les opérateurs $\theta_\nu(\xi,\eta)$, $\xi,\eta \in D(U,\nu)$.

1) $\mathcal{J}_\nu$ est un ideal bilatère de $\mathrm{End}_G(H)$.

2) Pour $\nu_1 \leq \nu_2$ on a $\mathcal{J}_{\nu_1} \subset \mathcal{J}_{\nu_2}$.

Démonstration.

1) Pour $A, B \in \mathrm{End}_G(H)$ on a $\theta_\nu(A\xi, B\eta) = A\theta_\nu(\xi,\eta)B^*$ d'où le résultat.

2) Soit f une fonction mesurable sur $G^{(0)}$, $0 \leq f \leq 1$, telle que $\nu_1 = (f \bullet s)\,\nu_2$. Soit M l'opérateur d'entrelacement de $L^2(G,\nu_1)$ dans $L^2(G,\nu_2)$ qui est défini par :

$$(Mg)(\gamma) = f^{\frac{1}{2}}(s(\gamma))\, g(\gamma) \qquad \forall\, g\,.$$

Par construction My est une isométrie pour tout $y \in G^{(0)}$ et on a $T_{\nu_2}(f^{\frac{1}{2}}\,\xi) = M \cdot T_{\nu_1}(\xi)$, $\forall\, \xi \in D(U,\nu_1)$, ainsi :

$$\theta_{\nu_2}(f^{\frac{1}{2}}\,\xi, f^{\frac{1}{2}}\,\xi) = T_{\nu_1}(\xi)^*\, M^*\, M\, T_{\nu_1}(\xi) = \theta_{\nu_1}(\xi,\xi)\,.$$

Q.E.D.

Théorème 10. Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse fidèle et U une représentation de G dans H. Les conditions suivantes sont équivalentes et indépendantes du choix de ν.

1) $D(U,\nu)$ contient un sous-ensemble dénombrable total.

2) U est équivalente à une sous-représentation de la somme directe d'une infinité dénombrable de copies de L^ν.

3) U est sous-équivalente à une représentation U' telle que : pour toute représentation V de G dans K avec $K_x \neq 0$, $\forall\, x$ on a U' sous-équivalente à $U' \otimes V$.

Démonstration.
1) $\Rightarrow$ 2). On peut supposer qu'il existe une section mesurable bornée $\xi \in D(U,\nu)$ telle que pour tout $y \in G^{(0)}$, les $(U(f\nu)\xi)_y$ ($\nu|f|$ borné) engendrent H_y. Cela montre que le support de $T_\nu(\xi)_y$ est égal à H_y, d'où le résultat en utilisant la décomposition polaire de l'opérateur d'entrelacement $T_\nu(\xi)$.

2) $\Rightarrow$ 3). La Proposition 7 montre que L^ν et donc $\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} L^\nu$ a la propriété demandée à U'.

3) $\Rightarrow$ 1). La propriété 1) est stable par passage à une sous-représentation, il suffit donc de la vérifier pour $U' \otimes L^\nu$ et donc pour une somme d'une infinité de copies de L^ν (démonstration de la Proposition 7). Cela résulte alors de la Proposition 8. Q.E.D.

Définition 11. Une représentation de G sera dite de *carré intégrable* si elle vérifie les conditions équivalentes du Théorème 10.

On vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 12.
a) Si (H,U) est de carré intégrable, toute sous-représentation l'est aussi.
b) Toute somme directe de représentations de carré intégrable est de carré intégrable.
c) Si U est de carré intégrable alors $U \otimes V$ l'est aussi, pour toute représentation V.
d) Pour tout foncteur mesurable *propre* de G dans la catégorie des espaces mesurés la représentation $L^2 \bullet F$ est de carré intégrable.

Démonstration. Vérifions d). Nous supposons $F(x)$ muni d'une mesure α^x avec $F(\gamma)\,\alpha^x = \delta(\gamma)\,\alpha^y$, $\forall\,\gamma : x \to y$ où δ est un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}_+^*$. Nous posons alors $(U(\gamma)f)(z) = \delta(\gamma)^{\frac12}\, f(\gamma^{-1} z)$, $\forall\, z \in F(y)$, $\gamma : x \to y$ ce qui définit la représentation $L^2 \bullet F$ de G, dans le champ mesurable des $L^2(F(x),\alpha^x)$. Soient $X = UF(x)$ et g une fonction bornée strictement positive ($g(z) > 0$, $\forall\, z$) sur X telle que $\nu * g \leq 1$. Pour tout $x \in G^{(0)}$ soit B_x l'opérateur de multiplication par g dans $L^2(F(x),\alpha^x)$. Alors pour tout $y \in G^{(0)}$ l'opérateur $\int U(\gamma)\, B_x\, U(\gamma)^{-1}\, d\nu^y(\gamma)$ de $L^2(F(y),\alpha^y)$ dans lui-même est donné par la multiplication par $\nu * g$. Ainsi d) résulte du lemme suivant :

Lemme 13. Soit U une représentation de G dans H, $\nu \in \mathcal{E}^+$, et $(B_x)_{x\in G^{(0)}}$ une famille mesurable bornée d'opérateurs positifs $B_x \in \mathcal{L}(H_x)$ telle que la famille $C_y = \int U(\gamma)\, B_x\, U(\gamma)^{-1}\, d\nu^y(\gamma)$ soit bornée. Alors pour toute section mesurable bornée ξ de H, la section $x \to B_x^{\frac12}\, \xi_x$ est dans $D(U,\nu)$.

Démonstration. Pour $\alpha \in H_y$, on a :

$$|\langle \alpha, U(\gamma)\, B_x^{\frac12}\, \xi_x\rangle|^2 = |\langle B_x^{\frac12}\, U(\gamma)^{-1}\, \alpha, \xi_x\rangle|^2 \leq \operatorname{Sup} \|\xi_x\|^2\, \langle U(\gamma)\, B_x\, U(\gamma)^{-1}\, \alpha, \alpha\rangle$$

d'où le résultat. Q.E.D.

Corollaire 14. Soient h un homomorphisme propre de G dans G' et U une représentation de carré intégrable de G' dans H, alors $h^* U = U \bullet h$ est de carré intégrable.

Démonstration. En effet, il suffit de vérifier cela pour U de la forme L^ν mais $h^* U$ est alors de la forme $L^2 \bullet F$ avec F *propre* (Proposition III.7). Q.E.D.

Proposition 15. Supposons G séparable. Soit U une représentation de carré intégrable de G dans H.

a) Pour tout $y \in G^{(0)}$ la restriction de U à G_y^y est une représentation de carré intégrable de ce groupe localement compact dans l'espace H_y.

b) Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse avec $\operatorname{Supp} H \subset \operatorname{Supp} \nu$, il existe un sous-ensemble dénombrable total de $D(U, \nu)$ tel que les $\theta_\nu(\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in D$ engendrent pour tout $y \in G^{(0)}$, le commutant de G_y^y dans H_y.

Démonstration. On peut supposer que $U = L^\nu$ est la représentation régulière gauche associée à ν. Soient $y \in G^{(0)}$, α une mesure de Haar à gauche sur $G_y^y = H$. Il existe une mesure positive π sur $X = s(G^y)$ et une section $x \to \gamma_x$ de l'application s, qui soit π-mesurable et telle que :

$$\nu^y = \int R(\gamma_x)\, \alpha\, d\pi(x)$$

où $R(\gamma_x)$ désigne la translation à droite par γ_x. Soit a l'application de G^y dans $H \times X$ telle que :

$$a(\gamma) = (\gamma \cdot \gamma^{-1} s(\gamma), s(\gamma))\,.$$

On a $a(\gamma \cdot \gamma_x) = (\gamma, x)$ donc a est un isomorphisme d'espaces mesurés de (G^y, ν^y) sur $(H \times X, \alpha \times \pi)$ qui transforme l'action de H par translations à gauche sur G^y en l'action de H par translations à gauche $\times$ identité sur $H \times X$.

Ainsi la restriction de U à H est un multiple de la représentation régulière de H d'où a). De plus le commutant de H dans $L^2(G^y, \nu^y)$ est engendré par les opérateurs T_k,

$$(T_k\, f)(\gamma) = \int k(\gamma, \gamma')\, f\,(\gamma')\, d\nu^y(\gamma')$$

où $k(g\gamma, g\gamma') = k(\gamma, \gamma')$, $\forall\, g \in G_y^y$ et

$$\operatorname{Sup}\left(\operatorname*{Sup}_{\gamma} \int |k(\gamma, \gamma')|\, d\nu^y(\gamma')\,,\ \operatorname*{Sup}_{\gamma} \int |k(\gamma, \gamma')|\, d\nu^y(\gamma) \right)$$

est fini. Soit D un ensemble dénombrable de fonctions mesurables f sur G avec $(\nu, \nu, f) \in L^1(G)$, total dans $L^1(G^y, \nu^y)$ pour tout y, et tel que pour $f \in D$, l'application $y \to f^y$ soit une section mesurable bornée de $(L^2(G^y, \nu^y))$. On a alors $f \in D(U, \nu)$, $\forall\, f \in D$ et $\theta_\nu(f, g)$ coïncide avec $R_\nu^\nu(f *_\nu g^v)$. On peut supposer que D est stable par convolution : $(f, g) \to f *_\nu g$. Il suffit de montrer que les opérateurs $R^\nu_\nu(f)_y$, $f \in D$ engendrent le commutant de G^y_y. La fermeture faible de l'espace engendré par ces opérateurs contient les $R^\nu_\nu(h)_y$, où $(\nu, \nu, h) \in L^1(G)$ et donc tous les opérateurs T_k ci-dessus, d'où le résultat. Q.E.D.

6 L'algèbre de von Neumann des opérateurs aléatoires

Soit Λ une mesure transverse de module δ sur G.

La construction ci-dessous ne dépend que de la classe de Λ i.e. que de la notion d'ensemble saturé Λ-négligeable. Cependant, pour montrer que l'algèbre étudiée est une algèbre de von Neumann, i.e. a un prédual, nous aurons (comme dans le cas classique pour trouver un prédual : L^1 à L^∞) à supposer que Λ est semi-finie.

Définition 1. Soient H_1, H_2 des représentations de carré intégrable de G, un *opérateur aléatoire* $T \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1, H_2)$ est une classe, modulo l'égalité Λ-presque partout, d'éléments de $\mathrm{Hom}_G(H_1, H_2)$.

Pour $T \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1, H_2)$ nous poserons $\|T\|_\infty = \underset{\Lambda}{\mathrm{Ess}} \mathrm{Sup}\, \|T_x\|$ ce qui a un sens car la fonction $x \to \|T_x\|$ est mesurable et constante sur les classes de $G^{(0)}$.

Nous utiliserons aussi la terminologie espace hilbertien Λ-aléatoire pour désigner une classe, modulo l'égalité Λ-presque partout, de représentations de carré intégrable de G.

Théorème 2. Pour tout espace hilbertien Λ-aléatoire H l'algèbre involutive normée $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est une *algèbre de von Neumann.*

Il en résulte que la catégorie $\mathcal{C}_\Lambda$ dont les objets sont les espaces hilbertiens et les morphismes sont les opérateurs Λ-aléatoires est une W^*-catégorie ([34]). Cette W^*-catégorie ne dépend que du couple $(G, \mathcal{B})$ et de la classe de Λ, en effet la notion de représentation de carré intégrable de G n'utilisait que la structure mesurable de G. Notons que pour le moment, pour H donné, $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est une algèbre de von Neumann abstraite, i.e. n'agit pas dans un espace de Hilbert particulier.

Les résultat du numéro 4 montrent que la catégorie $\mathcal{C}_\Lambda$ est munie des opérations de somme directe, de transposition, et de produit tensoriel. Bien que $\mathcal{C}_\Lambda$ ne possède pas en général d'objet non nul canonique, les objets de la forme $H = \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} L$ où L est la représentation régulière associée à $\nu \in \mathcal{E}^+$, fidèle, sont indépendants du choix de ν. L'algèbre de von Neumann $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est donc aussi, indépendante du choix de ν. Rappelons qu'une algèbre hilbertienne à gauche est une algèbre involutive $(\mathcal{A}, \ldots, \#)$ sur $\mathbb{C}$, munie d'une structure préhilbertienne séparée, et telle que (cf. [47])

(1) $\langle \xi\eta, \zeta \rangle\ \langle \eta, \xi^\# \zeta \rangle \qquad \forall\, \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{A}$.

(2) Pour tout ξ l'opérateur $L(\xi)$, $L(\xi)\eta = \xi\eta$ est borné.

(3) La représentation $\xi \mapsto L(\xi)$ est non dégénérée (dans $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{A}}$).

(4) L'involution $\xi \mapsto \xi^\#$ est un opérateur préfermé de $\mathcal{H}$.

Soit alors $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse sur G. Soient $\mu = \Lambda_\nu$ et $m = \mu \bullet \nu$, $\mathcal{H} = L^2(G, m)$. Construisons une algèbre hilbertienne à gauche $\mathcal{A}$ formée de fonctions mesurables sur G, de telle sorte que : a) l'espace hilbertien soit $\mathcal{H} = L^2(G,m)$, b) le produit soit $(f,g) \to f *_\nu g = f\nu * g$, c) l'involution soit $f \to f^\# = \delta^{-1} f^v$. L'opérateur $S : f \to f^\#$ est préfermé et $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ où $Jf = \delta^{-\frac{1}{2}} f^v$, $\Delta f = \delta f$ de sorte que la condition 4 est automatique. Par construction J est une involution isométrique et l'opérateur $L(f)$ est égal à $JR((Jf)^v)\,J$, où $R(k)$ désigne l'opérateur de convolution à droite par k. Dans la décomposition $\mathcal{H} = \int L^2(G^x,\nu^x)\,d\mu$, $R(h)$ est décomposé en $(R_\nu^\nu(h)_x)_{x\in G^{(0)}}$ et il est donc borné par $\mathrm{Sup}\,(\nu|h|,\nu|\tilde{h}|)$. On prendra donc pour $\mathcal{A}$ l'espace des fonctions mesurables f sur G telles que :

$$f \in L^2(G,m), \qquad f^\# \in L^2(G,m), \qquad (\nu,\nu,Jf) \in L^1(G)\,.$$

C'est une algèbre involutive car $Jf^\# = (Jf)^v$ et $L(f)$, $L(f^\#)$ sont bornés, de plus 3) résulte de la Proposition 2b).

Notation 3. Soit $W(\nu)$ l'algèbre de von Neumann associée à l'algèbre hilbertienne à gauche $L^2(G,m)$, $m = \Lambda_\nu \bullet \nu$ pour $\nu \in \mathcal{E}^+$.

Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$, H un espace hilbertien Λ-aléatoire. L'espace $\nu(H) = \int H_x\, d\Lambda_\nu(x)$ est un espace hilbertien et pour $T \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1,H_2)$, l'opérateur décomposable $(T_x)_{x\in G^{(0)}}$ définit un opérateur borné $\nu(T)$ de $\nu(H_1)$ dans $\nu(H_2)$. Il est clair que le Théorème 2 se déduit du résultat suivant :

Théorème 4. Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$.

(1) Pour tout espace hilbertien Λ-aléatoire H, il existe une unique représentation normale de $W(\nu)$ dans $\nu(H)$ telle que $U_\nu(f) = U(f\nu)$, $f \in \mathcal{A}_\nu$.

(2) $H \mapsto \nu(H)$, $T \mapsto \nu(T)$ est un foncteur de $\mathcal{C}_\Lambda$ dans la catégorie des $W(\nu)$-modules.

(3) Si ν est fidèle, ce foncteur est une équivalence de catégories.

Le (3) signifie que $T \mapsto \nu(T)$ est une isométrie de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ sur le commutant de $W(\nu)$ dans $\nu(H)$, ce qui montre que $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est bien une algèbre de von Neumann.

Démonstration.

1) On peut supposer que H est la représentation régulière gauche L associée à ν (Théorème 4.10). Pour toute section mesurable ξ de $(L^2(G^x,\nu^x))_{x\in G^{(0)}}$, on a :

$$(L(f\nu)\,\xi)_y = \int L(\gamma)\,\xi_x\, f(\gamma)\,d\nu^y(\gamma)\,.$$

Ainsi dans $L^2(G,m) = \int L^2(G^x,\nu^x)\,d\mu(x)$ l'opérateur $L(f\nu)$ coïncide avec la convolution à gauche par f, de sorte que la représentation normale $(L)_\nu$ n'est autre que la représentation canonique de $W(\nu)$ dans $L^2(G,m)$.

2) C'est une vérification simple, notons cependant que en général on n'a pas d'interprétation pour $\nu(H_1 \otimes H_2)$.

Si ν est fidèle on a $\nu(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$ pour $T \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$.

3) Montrons d'abord que tous les opérateurs diagonaux dans $\nu(H) = \int H_x \, d\mu(x)$ sont dans l'image de $W(\nu)$.

Soit f une fonction mesurable bornée sur $G^{(0)}$ et soit $r(f)$ l'opérateur de multiplication par $(f \bullet r)$ dans $L^2(G,m)$. Quand on écrit $L^2(G,m) = \int L^2(G^x, \nu^x) \, d\mu(x)$ les opérateurs de convolution à droite sont décomposés, il donc clair que $r(f)$ commute avec eux et donc : $r(f) \in W(\nu)$. Calculons alors $U_\nu(r(f))$ comme opérateurs dans $\nu(H)$. Pour tout élément g de l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathcal{A}_\nu$ on a $r(f) \bullet L(g) = L((f \bullet r)g)$, ainsi $U_\nu(r(f))\, U(g\nu) = U((f \bullet r)\, g\nu)$ d'où pour toute section mesurable bornée ξ :

$$[U_\nu(r(f))\,(U(g\nu)\,\xi)]_y = \int U(\gamma)\,\xi_x\, f(y)\, g(\gamma)\, d\nu^y(\gamma) = f(y)\,(U(g\nu)\,\xi)_y\,.$$

Soit T un élément du commutant de $W(\nu)$ dans l'espace de Hilbert $\nu(H) = \int H_x \, d\mu(x)$, $\mu = \Lambda_\nu$. Comme T commute avec les opérateurs diagonaux, c'est un opérateur décomposable et il existe une application mesurable bornée $x \mapsto T_x$, $x \in G^{(0)}$ telle que pour toute section mesurable ξ de H de carré μ-intégrable, on ait $(T\xi)_x = T_x\, \xi_x$ μ-presque sûrement.

Pour toute fonction mesurable h sur G avec $(\nu,\nu,h) \in L^1(G)$, T commute avec $U(h\nu)$, ce qui montre que :

$$\mu \left\{ y \in G^{(0)}\,, \quad \int (T_y\, U(\gamma) - U(\gamma)\, T_x)\, \xi_x\, h(\gamma)\, d\nu^y(\gamma) \neq 0 \right\} = 0\,.$$

Prenant des ensembles dénombrables totaux de h et de ξ on a donc un sous-ensemble mesurable A de $G^{(0)}$, avec : $\mu(A^c) = 0$, $\forall\, y \in A$, $T_y\, U(\gamma) = U(\gamma)\, T_x$ pour ν^y-presque tout $\gamma \in G^y$. Soit B le sous-ensemble *saturé mesurable* de $G^{(0)}$, complémentaire de $[A^c]_\nu$, alors B^c est Λ-négligeable (Proposition 2.8b)). Pour $x \in B$, l'ensemble A^c est $s(\nu^x)$-négligeable.

Prenons f comme dans le Lemme 1.3, avec $\nu(f) = 1$.

Posons $T'_y = \int_{G^y} U(\gamma)\, T_x\, U(\gamma)^{-1}\, f(\gamma)\, d\nu^y(\gamma)$ pour $y \in B$ et $T'_y = 0$ si $y \notin B$. Pour $y \in A$ on a $T'_y = T_y$, il nous suffit donc de vérifier que pour $\gamma_1 : x_1 \to y_1$, $x_1, y_1 \in B$ on a $U(\gamma_1)\, T'_{x_1}\, U(\gamma_1)^{-1} = T'_{y_1}$, or le premier membre s'écrit :

$$\int U(\gamma_1\,\gamma)\, T_x\, U(\gamma_1\,\gamma)^{-1}\, f(\gamma)\, d\nu^{x_1}(\gamma) = \int U(\gamma')\, T_x\, U(\gamma')^{-1}\, f(\gamma_1^{-1}\,\gamma')\, d\nu^{y_1}(\gamma')$$

donc si $y_1 \in A$ cela coïncide avec T_{y_1}, vu que $U(\gamma')\, T_x\, U(\gamma')^{-1}$ est égal à T_{y_1}, $s(\nu^{y_1})$-presque partout.

Cela montre l'égalité cherchée pour $y_1 \in A$ et $x_1 \sim y_1$ donc dans le cas général vu que pour $x \in B$, $[x] \cap A \neq \emptyset$. On a montré que le commutant de $W(\nu)$ dans $\nu(H)$ est égal à $\nu(\mathrm{End}_\Lambda(H))$, il nous reste à vérifier que toute représentation normale de $W(\nu)$ est de la forme $\nu(H)$. Or toute représentation normale de $W(\nu)$ (dans un espace séparable) est une sous-représentation de $\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} L_\nu$ d'où la conclusion. Q.E.D.

Corollaire 5. Soient H un espace hilbertien Λ-aléatoire et $\nu \in \mathcal{E}^+$. Alors l'espace vectoriel $J^\nu \subset \mathrm{End}_\Lambda(H)$ engendré par les $\theta_\nu(\xi,\eta)$, $\xi,\eta \in D(U,\nu)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$, faiblement dense si ν est fidèle.

Démonstration. On a un homomorphisme surjectif naturel de $\mathrm{End}_G(H)$ sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ et J^ν est l'image de $\mathcal{J}^\nu$ (Corollaire 4.9) qui est un idéal de $\mathrm{End}_G(H)$. Si ν est fidèle, la Proposition 4.2 montre que la réunion des images des opérateurs $T_\nu(\xi)^*$ (cf. Proposition 4.8), $\xi \in D$ sous-ensemble dénombrable total de $D(U,\nu)$, est totale dans H_x pour tout $x \in G^{(0)}$. Ainsi la représentation naturelle de J^ν dans $\nu(H)$ est non dégénérée d'où le résultat. Q.E.D.

Corollaire 6. Soient $(G_i,\mathcal{B}_i,\Lambda_i)$ des groupoïdes mesurables, $i=1,2$ et $h : G_1 \to G_2$ un homomorphisme propre tel que $h(\Lambda_1)$ soit absolument continue relativement à Λ_2.

a) Pour tout espace Λ_2-aléatoire H l'espace $h^*\,H$ est Λ_1-aléatoire.

b) L'application qui à $T=(T_x) \in \mathrm{End}_{\Lambda_2}(H)$ associe $h^*\,T = (T_{h(x)}) \in \mathrm{End}_{\Lambda_1}(h^*\,H)$ est un homomorphisme normal.

c) Si h est une équivalence de catégorie avec $h(\Lambda_1) \sim \Lambda_2$ alors h^* est un isomorphisme de $\mathrm{End}_{\Lambda_2}(H)$ sur $\mathrm{End}_{\Lambda_1}(h^*\,H)$.

Démonstration.

a) On a $(h^*\,H)_x = H_{h(x)}$, il suffit de vérifier que si l'on modifie H sur A saturé Λ_2-négligeable, cela ne modifie $h^*\,H$ que sur $h^{-1}(A)$ qui est saturé Λ_1-négligeable.

b) Par construction h^* est un homomorphisme normiquement continu, on vérifie directement qu'il est complètement additif donc normal.

c) Soit k avec $h \bullet k \sim \mathrm{id}_{G_2}$, $k \bullet h \sim \mathrm{id}_{G_1}$. Comme $k^*\,h^*\,H$ est équivalent à H on peut supposer que $H = k^*\,H_1$. On a alors un entrelacement canonique entre $h^*\,H$ et H_1 qui remplace $T \in \mathrm{End}_\Lambda(h^*\,H)$ par T_1 tel que $(h^* \bullet k^*)\,T_1 = T$.

Cela montre que h^* est surjectif. L'injectivité est immédiate. Q.E.D.

Corollaire 7. Supposons que $G_y^y = \{y\}$ pour Λ-presque tout $y \in G^{(0)}$. Pour tout espace Λ-aléatoire H, le centre de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est l'algèbre des opérateurs aléatoires $f = (f(x)\,1_{H_x})_{x\in G^{(0)}}$ où f est mesurable bornée constante sur les classes de $G^{(0)}$.

Démonstration. Soit D un ensemble dénombrable total, $D \subset D(U,\nu)$ vérifiant les conditions de la Proposition IV 15b), où $\nu \in \mathcal{E}^+$ est fidèle. Soit $A \subset G^{(0)}$ mesurable saturé, A^c Λ-négligeable, tel que pour tout $x \in A$ les $\theta_\nu(\xi,\eta)$, $\xi,\eta \in D$ soient irréductibles dans H_x. Si $T \in$ Centre $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ on peut trouver un représentant $T' \in \mathrm{End}_G(H)$ qui commute Λ-presque partout avec les $\theta_\nu(\xi,\eta)$, $\xi,\eta \in D$. On a alors $T'_x = f(x)\,1_{H_x}$, $x \in G^{(0)}$ Λ-presque partout. Q.E.D.

Corollaire 8. On suppose que $G_y^y = \{y\}$, $\forall\, y \in G^{(0)}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est un facteur $\forall\, H$.
2) $\mathrm{Hom}_\Lambda(H_1, H_2) \neq \{0\}$ si H_1 et $H_2 \neq 0$.
3) $\exists\, \nu \in \mathcal{E}^+$ fidèle telle que $W(\nu)$ soit un facteur.
4) Pour tout $A \subset G^{(0)}$, mesurable saturé, on a $\Lambda(A)$ ou $\Lambda(A^c) = 0$.
5) Λ est extrémale parmi les mesures transverses de module δ.

Démonstration. On a 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) et 3) $\Rightarrow$ 1) résulte de V 4. Le Corollaire 7 montre que 1) $\Leftrightarrow$ 4).

Corollaire 9. Supposons que $G_y^y = \{y\}$ pour Λ-presque tout $y \in G^{(0)}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un espace hilbertien Λ-aléatoire H, avec $H_x \neq \{0\}$ Λ-presque partout, et $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ de type I.
2) $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est de type I pour tout H.
3) Il existe $A \subset G^{(0)}$, mesurable saturé de complémentaire Λ-négligeable tel que la représentation triviale de G_A soit de carré intégrable.
4) Il existe une fonction transverse $\nu' \in \mathcal{E}^+$, bornée de support Λ-conégligeable.

Démonstration.

1) $\Rightarrow$ 3). Soit $P \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$ un projecteur abélien de support central 1, alors $P_x \neq 0$ Λ-presque partout (Corollaire 6). Il existe donc un espace hilbertien Λ-aléatoire $H' = P(H)$ vérifiant 1) avec $\mathrm{End}_\Lambda(H')$ commutatif. Cela impose comme dans le Corollaire 7 que H'_x est de dimension 1 pour Λ-presque tout x, d'où 3).

3) $\Rightarrow$ 4). Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$ fidèle. On peut supposer que $A = G^{(0)}$. Il existe par hypothèse une suite de fonctions mesurables bornées f_n sur $G^{(0)}$ telles que $\forall\, x \in G^{(0)}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \neq 0$ et $\int |f_n(x)|^2\, d\nu^y(\gamma) < \infty$, $\forall\, n$. Soit alors (α_n) une suite de réels $\alpha_n > 0$ avec $\int \Sigma\, \alpha_n\, |f_n(x)|^2\, d\nu^y(\gamma) \leq 1$. Posons $\nu' = (\varphi \bullet s)\nu$, où $\varphi = \Sigma\, \alpha_n\, |f_n|^2$, alors ν' est une fonction transverse *bornée*.

4) $\Rightarrow$ 2). Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$ avec ν^y de masse totale 1 pour Λ-presque tout $y \in G^{(0)}$. Alors l'application E_ν de l'algèbre de von Neumann P intégrale directe sur $(G^{(0)}, \Lambda_\nu)$ des $\mathcal{L}(H_x)$, sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ définie par :

$$(E_\nu(B))_y = \int U(\gamma)\, B_x\, U(\gamma)^{-1}\, d\nu^y(\gamma)$$

est une espérance conditionnelle normale fidèle. Comme P est de type I il en est de même de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$. Q.E.D.

Remarque 10. Si G est standard, en tant qu'espace mesurable, la condition 4) ci-dessus équivaut à l'existence d'une section mesurable, en dehors d'un ensemble Λ-négligeable, pour la relation d'équivalence naturelle sur $G^{(0)}$.

Corollaire 11. Soit M un facteur proprement infini de la forme $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ où Λ est une mesure transverse sur un groupoïde mesurable G satisfaisant $G_x^x = \{x\}$,

$\forall\, x \in G^{(0)}$. Il existe alors un endomorphisme σ de M et un unitaire $S \in M$ tels que, avec $\sigma_S = S\sigma(\cdot)\,S^*$ on ait :

1) $\sigma(M)$ et $\sigma_S(M)$ sont le commutant l'un de l'autre et engendrent M,

2) $S^2 = 1$.

Notons que l'hypothèse "M isomorphe à $M \otimes M$" ne suffit pas à assurer 1) et 2) car l'automorphisme $x \otimes y \to y \otimes x$ de $M \otimes M$ n'est intérieur que si M est de type I (S. Sakai).

Nous laissons la démonstration à titre d'exercice ; elle utilise l'équivalence de H avec $H \otimes H$ (modulo Λ).

On pourra ensuite utiliser les résultats du numéro VI pour montrer l'existence d'un poids opératoriel de M sur $\sigma(M)$ dont le groupe d'automorphismes modulaires (défini sur $\sigma_S(M)$) est l'identité.

7 Poids normaux semi finis sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$

Soient (G, Λ, δ) comme ci-dessus.

Si T est un opérateur densement défini, fermé, d'un espace de Hilbert H_1 dans H_2, sa décomposition polaire $T \subset u\,|T|$ équivaut à donner le couple d'opérateurs bornés $(u, (1 + T^*T)^{-1})$. Il y a donc un sens à parler de familles mesurables d'opérateurs non bornés fermés (cf. [32]).

Définition 1. Soient (H, U) et (H', U') des représentations de carré intégrable de G et $(T_x)_{x \in G^{(0)}}$ une famille mesurable où T_x est un opérateur fermé densement défini de H_x dans H'_x. Nous dirons que T est de *degré* α, où $\alpha \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \gamma \in G\,,\ \gamma : x \to y \quad \text{on a} \quad U'(\gamma)\, T_x = \delta(\gamma)^\alpha\, T_y\, U(\gamma)\,.$$

Comme nous étudions G modulo les ensembles saturés N qui sont Λ-négligeables, nous dirons encore que T est de degré α si l'égalité ci-dessus a lieu pour $\gamma \in G_{N^c}$ et nous parlerons d'opérateur aléatoire de degré α pour désigner une classe, modulo l'égalité Λ-presque partout, de familles mesurables de degré α. Quand G est un groupe localement compact la Définition 1 coïncide avec celle de [15].

Théorème 2. Soit (H, U) une représentation de carré intégrable de G.

a) Soit T un opérateur aléatoire *positif* (i.e. T_x est autoadjoint positif pour tout $x \in G^{(0)}$) de degré 1, il existe alors un unique poids normal semi-fini φ_T sur l'algèbre de von Neumann $\mathrm{End}_\Lambda(H)$, tel que :

$$\varphi_T(\theta_\nu(\xi, \xi)) = \int \langle T_x\, \xi_x, \xi_x \rangle\, d\Lambda_\nu(x)$$

$$\forall\, \nu \in \mathcal{E}^+\,, \quad \forall\, \xi \in D(U, \nu)\,.$$

b) L'application $T \mapsto \varphi_T$ est *bijective*, et φ_T est fidèle ssi T_x est non singulier pour Λ-presque tout x.

Démonstration. Fixons $\nu \in \mathcal{E}^+$, fidèle, et construisons grâce aux résultats de [11] un poids Φ_ν sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$. Nous montrerons ensuite qu'il ne dépend pas du choix de ν.

Soient N l'algèbre de von Neumann $W(\nu)$ et ψ le poids canonique sur N provenant de la structure d'algèbre hilbertienne à gauche (cf. numéro V). L'espace de Hilbert $\nu(H) = \int H_x\, d\Lambda_\nu(x)$ est un N-module.

Lemme 3. Pour tout $\xi \in D(U, \nu)$ le vecteur correspondant $\xi' = (\xi_x)_{x \in G^{(0)}}$ de $\nu(H)$ appartient à $D(\nu(H), \psi)$ et :

$$\theta^\psi(\xi', \xi') = \nu(\theta_\nu(\xi, \xi))\,.$$

Démonstration. En effet $R^\psi(\xi')$ est par définition l'opérateur de $L^2(G, m)$ (où $m = \Lambda_\nu \bullet \nu$) dans $\nu(H)$ qui à une fonction mesurable f associe $(U(f\nu)\xi)' =$

$(T_\nu(\xi)^* f)'$. Ainsi $\theta^\psi(\xi',\xi') = R^\psi(\xi')\, R^\psi(\xi')^*$ est donné par la famille d'opérateurs $T_\nu(\xi)_x^*\, T_\nu(\xi)_x = \theta_\nu(\xi,\xi)_x$, $x \in G^{(0)}$. Q.E.D.

Lemme 4. Soit $\nu(T)$ l'opérateur autoadjoint positif densement défini, dans $\nu(H) = \int H_x\, d\Lambda_\nu(x)$ associé à la famille $(T_x)_{x\in G^{(0)}}$. Alors $\nu(T)$ est homogène de degré -1 en ψ.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction mesurable f sur G, $\nu\,|f|$ borné, on a :

$$T^{it}\, U(\delta^{it}\, f\nu) = U(f\nu)\, T^{it}\,.$$

Soit ξ une section mesurable bornée de H, on a :

$$\begin{aligned}(T^{it}\, U(\delta^{it}\, f\nu)\,\xi)_y &= T_y^{it} \int U(\gamma)\,\xi_x\,\delta(\gamma)^{it}\, f(\gamma)\, d\nu^y(\gamma) \\ &= \int U(\gamma)\, T_x^{it}\,\xi_x\, f(\gamma)\, d\nu^y(\gamma) = (U(f\nu)\, T^{it}\,\xi)_y\,.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Terminons la démonstration du Théorème 2. Comme ν est un homomorphisme de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ sur le commutant de N dans $\nu(H)$, le Théorème 13 de [11] associe à l'opérateur $\nu(T)$ homogène de degré -1 en ψ un poids normal semi fini Φ_ν sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ tel que :

$$\Phi_\nu(\theta_\nu(\xi,\xi)) = \int_{G^{(0)}} \langle T_x\,\xi_x, \xi_x\rangle\, d\Lambda_\nu(x) \qquad \forall\,\xi \in D(U,\nu)\,.$$

Comme ν est fidèle, cette égalité détermine uniquement le poids Φ_ν grâce au Corollaire V.5. Ainsi pour montrer que Φ_ν ne dépend pas du choix de ν il suffit de montrer que

$$\Phi_{\nu_1}(\theta_{\nu_1}(\xi,\xi)) = \Phi_{\nu_2}(\theta_{\nu_1}(\xi,\xi)) \qquad \forall\,\xi \in D(U,\nu_1)$$

pour $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{E}^+$ fidèles avec $\nu_1 \le \nu_2$, $\nu_1 = (f \bullet s)\,\nu_2$ où f est une fonction mesurable sur $G^{(0)}$, comprise entre 0 et 1. On a

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu_2}(\theta_{\nu_1}(\xi,\xi)) &= \Phi_{\nu_2}(\theta_{\nu_2}(f^{\frac12}\,\xi, f^{\frac12}\,\xi)) \\ &= \int \langle T_x\, f^{\frac12}\,\xi_x, f^{\frac12}\,\xi_x\rangle\, d\Lambda_{\nu_2}(x) = \int \langle T_x\,\xi_x, \xi_x\rangle\, d\Lambda_{\nu_1}(x) \\ &= \Phi_{\nu_1}(\theta_{\nu_1}(\xi,\xi))\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Soit T' un opérateur autoadjoint positif homogène de degré -1 en ψ dans l'espace $\nu(H)$. Comme au numéro V (Théorème 4.3), il existe alors un opérateur aléatoire positif T tels que $\nu(T) = T'$. De plus pour que $\nu(T_1) = \nu(T_2)$ il faut et il suffit que $T_1 = T_2$ Λ-presque partout. L'assertion b) résulte donc de [11]. Q.E.D.

Corollaire 5. Gardons les notations du Théorème 2.

a) Le groupe d'automorphismes modulaires de φ_T est donné par

$$(\sigma_t(A))_x = T_x^{it}\, A_x\, T_x^{-it} \qquad \forall\, A \in \mathrm{End}_\Lambda(H)\,.$$

b) Soient T_1, T_2 des opérateurs positifs aléatoires de degré 1, alors

$$(D\varphi_{T_2} : D\varphi_{T_1})_t = (T_{2_x}^{it}\, T_{1_x}^{-it})_{x\in G^{(0)}}\,.$$

Démonstration. Cela résulte de [11] Théorème 9.

Corollaire 6. Supposons que pour Λ-presque tout $x \in G^{(0)}$ on ait $\delta(\gamma) = 1$, $\forall\,\gamma \in G_x^x$ et soit H un espace hilbertien Λ-aléatoire tel que la représentation associée de G_x^x soit factorielle pour Λ-presque tout $x \in G^{(0)}$. Soient T un opérateur aléatoire positif de degré 1 et $\varphi_T = \varphi$ le poids correspondant sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$. Pour $E \in \mathbb{R}$ on a équivalence entre

$$\exp E \in \mathrm{spectre}\, \sigma\varphi$$

et

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \text{l'ensemble suivant n'est pas } \Lambda\text{-négligeable :}\\ &\{x \in G^{(0)}\,, \quad \exists\, E_1, E_2 \in \mathrm{Spectre}\,(\mathrm{Log}\, T_x)\,,\\ &E_1 - E_2 \in [E-\varepsilon, E+\varepsilon]\}\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse fidèle et P l'algèbre de von Neumann des classes, modulo l'égalité Λ_ν-presque partout, d'applications mesurables bornées

$$B = (B_x)_{x\in G^{(0)}}\,,\ B_x \in \mathcal{L}(H_x) \qquad \forall\, x \in G^{(0)}\,.$$

Par construction P est une algèbre de von Neumann de type I et l'égalité

$$\rho_T(B) = \int \mathrm{Trace}\,(T_x\, B_x)\, d\Lambda_\nu(x) \qquad \forall\, B$$

définit un poids normal semifini sur P. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Spectre}\,\sigma^\varphi = \mathrm{Spectre}\,\sigma^\rho$. Le Corollaire 5 montre que la restriction de σ^ρ à $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ coïncide avec σ^φ. Soit Q le commutant relatif de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ dans P.

La Proposition IV(15b) montre que $B = (B_x)_{x\in G^{(0)}}$ est dans Q ssi $B_x \in (U(G_x^x))''$ pour Λ_ν-presque tout $x \in G^{(0)}$.

Ainsi $\mathrm{End}_\Lambda(H) \cup Q$ engendre P car $U(G_x^x)''$ est un facteur pour Λ_ν-presque tout $x \in G^{(0)}$. Comme $\delta(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in G_x^x$ on voit que la restriction de σ^ρ à Q est l'identité, et donc que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a_i \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$ et $b_i \in Q$ on a : $\sigma^\rho(f)(\Sigma\, a_i\, b_i) = \Sigma\, \sigma^\varphi(f)(a_i)\, b_i$. Ainsi $\sigma^\rho(f) = 0 \Leftrightarrow \sigma^\varphi(f) = 0$. Q.E.D.

Corollaire 7. Avec les hypothèses du Corollaire 6 pour que φ_T soit une trace il faut et il suffit que T_x soit un scalaire $T_x = \lambda_x 1$ pour Λ-presque tout $x \in G^{(0)}$.

Ainsi les calculs se font exactement comme si on travaillait dans H_x avec le poids défini sur $\mathcal{L}(H_x)$ par l'opérateur positif T_x, par $A \mapsto \mathrm{Trace}\,(T_x\,A)$. Nous noterons $\Phi_T(1)$ sous la forme $\int \mathrm{Trace}\,(T_x)\,d\Lambda(x)$. Si T est un opérateur aléatoire de degré $1/2$ de H dans H' on a $\int \mathrm{Trace}\,(T_x^*\,T_x)\,d\Lambda(x) = \int \mathrm{Trace}\,(T_x\,T_x^*)\,d\Lambda(x)$, comme conséquence de [11].

Le poids opératoriel E_ν

Le lien entre le poids φ_T et le poids sur l'algèbre de von Neumann P intégrale directe des $\mathcal{L}(H_x)$ selon Λ_ν, associé à $\int \mathrm{Tr}(T_x\,\cdot)\,d\Lambda_\nu(x)$ est précisé ainsi :

Lemme 8. Soient H un espace hilbertien Λ-aléatoire et ν une fonction transverse fidèle sur G. Il existe alors un unique poids opératoriel E_ν de l'algèbre de von Neumann P sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ tel que pour tout opérateur aléatoire positif T on ait $\varphi_T \bullet E_\nu = \rho_T$. Pour tout $B = (B_x)_{x\in G^{(0)}}$, $B \in P^+$, tel que la famille suivante soit bornée :

$$C_y = \int U(\gamma)\,B_x\,U(\gamma)^{-1}\,d\nu^y(\gamma)\,,$$

on a :

$$E_\nu(B) = C\,.$$

Démonstration. Pour tout T la restriction de $\sigma_t^{\rho_T}$ à $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ étant égale à σ^{φ_T} il existe un poids opératoriel E_ν^T tel que $\Phi_T \bullet E_\nu^T = \rho_T$. Le Corollaire 5b) montre que E_ν^T ne dépend pas du choix de T. Montrons que $E_\nu(B) = C$. Soit $\xi = (\xi_x)_{x\in G^{(0)}}$ une section mesurable bornée de H, $\|\xi_x\| \le 1$, $\forall\,x$, et $\eta_x = B_x^{\frac12}\,\xi_x$. Comme $\eta_x \otimes \eta_x^c \le B_x$ on a $\int (U(\gamma)\,\eta_x \otimes (U(\gamma)\,\eta_x)^c)\,d\nu^y(\gamma) \le C_y$, $\forall\,y \in G^{(0)}$ ce qui montre que $\eta \in D(U,\nu)$ car :

$$\int U(\gamma)\,\eta_x \otimes (U(\gamma)\,\eta_x)^c\,d\nu^y(\gamma) = \theta_\nu(\eta,\eta)_y$$

par construction. Soit ξ^n, $n \in \mathbb{N}$ une suite de sections mesurables bornées de H telles que pour tout $x \in G^{(0)}$ l'ensemble des ξ^n différents de 0, soit une base orthonormale de H_x. Avec $\eta^n = B^{\frac12}\,\xi^n$ on a $B_x = \sum_1^\infty \eta_x^n \otimes \eta_x^{n^c}$, $\forall\,x \in G^{(0)}$. Il suffit donc, vu la normalité de E_ν, de vérifier que $E_\nu(\eta \otimes \eta^c) = \theta_\nu(\eta,\eta)$, $\forall\,\eta \in D(U,\nu)$, pour conclure que :

$$E_\nu(B) = \operatorname*{Sup}_n E_\nu\left(\sum_1^n \eta_j \otimes \eta_j^c\right) = \operatorname*{Sup}_n \sum_1^n \theta_\nu(\eta_j,\eta_j) = C\,.$$

Or, on a pour tout T de degré 1 l'égalité

$$\rho_T(\eta \otimes \eta^c) = \int \langle T_x\,\eta_x, \eta_x\rangle\,d\Lambda_\nu(x) = \Phi_T(\theta_\nu(\eta,\eta))\,,$$

d'où le résultat grâce au Théorème 2. Q.E.D.

Lemme 9. Soient F un foncteur mesurable *propre* de G dans la catégorie des espaces mesurés et H l'espace Λ-aléatoire $L^2 \bullet F$. Pour toute fonction mesurable positive f sur $\bigcup_{x \in G^{(0)}} F(x)$ soit $M(f) = (M(f)_x)_{x \in G^{(0)}}$ la famille des opérateurs de multiplication par f dans $H_x = L^2(F(x))$. Alors $\forall\, \nu \in \mathcal{E}^+$ on a $E_\nu(M(f)) = M(\nu * f)$.

Démonstration. L'opérateur $U(\gamma)\, M(f)_x\, U(\gamma)^{-1}$ est égal à la multiplication par la fonction $\gamma' \mapsto f(\gamma^{-1}\,\gamma')$ sur $F(y)$. Ainsi

$$\int U(\gamma)\, M(f)_x\, U(\gamma)^{-1}\, d\nu^y(\gamma)$$

est égal à la multiplication par

$$\int f(\gamma^{-1}\,\gamma')\, d\nu^y(\gamma) = (\nu * f)(\gamma') \quad \text{sur} \quad F(y)\,.$$

Q.E.D.

Groupes d'automorphismes modulaires intégrables et flot des poids de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$

Soient $(G, \mathcal{B}, \Lambda)$ comme ci-dessus, δ le module de Λ, et H un espace hilbertien Λ-aléatoire. Soit alors (G', h) le noyau stable de δ, de sorte que (cf. numéro III) $G' = G \times \mathbb{R}_+^*$ est doté d'une mesure transverse canonique Λ' et $h(\gamma, s) = \gamma$ est un homomorphisme propre.

Nous étudions les poids $\varphi = \varphi_T$ sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ dont le groupe d'automorphismes modulaires, σ^φ, est intégrable ; cette étude contient à la fois le calcul du flot des poids de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ et de sa décomposition continue [9].

Lemme 10. Soient T un opérateur positif de degré 1 de H dans H et $\varphi = \varphi_T$ le poids correspondant sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$.

a) Si σ^φ est intégrable, la mesure spectrale de T_x est absolument continue, Λ-presque partout, et la décomposition spectrale $H_x = \int H_{(x,t)}\, dt$ définit une représentation H' de $G' = G \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Soient E^φ le poids opératoriel de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$, sur le centralisateur de φ et $\xi = (\xi_x)_{x \in G^{(0)}}$ tel que $\xi \in D(H, \nu)$ pour une $\nu \in \mathcal{E}^+$, avec $\theta_\nu(\xi, \xi) \in \text{Domaine}\, E^\varphi$. Soit $\xi_{(x,t)}$ la section correspondante de H', alors :

$$E^\varphi(\theta_\nu(\xi, \xi)) = \theta_{\nu'}(\xi', \xi')\,.$$

Démonstration.

a) Prenons $\nu \in \mathcal{E}^+$ fidèle et P et E_ν comme ci-dessus, alors $\psi = \varphi \bullet E_\nu$ est intégrable donc le poids $\mathrm{Tr}\,(T_{x^\cdot})$ est intégrable sur $\mathcal{L}(H_x)$ pour Λ_ν-presque tout

x. On a $U(\gamma)\,T_x\,U(\gamma)^{-1} = \delta(\gamma)\,T_y$, $\forall\,\gamma : x \to y$, ainsi l'isométrie $U(\gamma)$ de H_x sur H_y se décompose en isométries $U'(\gamma, s)$ de $H_{(x,t)}$ sur $H_{(y,s)}$ où $(\gamma, s) \in G \times \mathbb{R}_+^* = G'$, $r(\gamma, s) = (y, s)$ et $s(\gamma, s) = (s(\gamma), s\delta(\gamma)) = (x, t)$. Les égalités $U(\gamma_1\,\gamma_2) = U(\gamma_1)\,U(\gamma_2)$ et $\delta(\gamma_1\,\gamma_2) = \delta(\gamma_1)\,\delta(\gamma_2)$ montrent que U' est bien une représentation de G'.

b) Pour $y' = (y, t)$ rappelons que $d\nu'^{y'}(\gamma, t) = d\nu^y(\gamma)$. On a

$$E^\varphi(\theta_\nu(\xi, \xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_t^\varphi(\theta_\nu(\xi, \xi))\,dt\,,$$

d'où

$$[E^\varphi(\theta_\nu(\xi, \xi))]_y = \int_{-\infty}^{+\infty} T_y^{it}\,\theta_\nu(\xi, \xi)_y\,T_y^{-it}\,dt\,.$$

Donc pour tout $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ dans $H_y = \int H_{(y,t)}\,dt$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle E^\varphi(\theta_\nu(\xi, \xi))_y\,\alpha, \alpha\rangle &= \int \langle \theta_\nu(\xi, \xi)_y\,T_y^{-it}\,\alpha, T_y^{-it}\,\alpha\rangle\,dt \\
&= \iint |\langle T_y^{-it}\,\alpha, U(\gamma)\,\xi_x\rangle|^2\,d\nu^y(\gamma)\,dt \\
&= \iint \left| \int \lambda^{-it} \langle \alpha_\lambda, U'(\gamma, \lambda)\,\xi'_{s(\gamma,\lambda)}\rangle\,d\lambda \right|^2\,dt\,d\nu^y(\gamma) \\
&= \iint |\langle \alpha_\lambda, U'(\gamma, \lambda)\,\xi'_{s(\gamma,\lambda)}\rangle|^2\,d\lambda\,d\nu^y(\gamma) \\
&= \int \langle \theta_{\nu'}(\xi', \xi')\,\alpha_\lambda, \alpha_\lambda\rangle\,d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Théorème 11. Soient φ un poids (normal fidèle semi-fini) sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ tel que σ^φ soit intégrable, et $T = (T_x)$ l'opérateur de degré 1 correspondant. La décomposition spectrale de T définit alors un espace Λ'-aléatoire H' sur G' et un isomorphisme canonique entre $\mathrm{End}_{\Lambda'}(H')$ et le centralisateur de φ.

Démonstration. L'existence de la représentation H' de G' résulte du Lemme 10. Pour voir que H' est (λ'-presque sûrement) de carré intégrable, il suffit (avec les notations du lemme) de trouver un ensemble dénombrable total D de sections $\xi \in D(H, \nu)$ telles que $\theta_\nu(\xi, \xi)$ soit dans le domaine de E^φ pour tout $\xi \in D$. Or si $A \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$ vérifie $E^\varphi(AA^*) \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$, la section $\xi' = A\xi$, $\xi \in D(H, \nu)$ vérifie les conditions ci-dessus car $\theta_\nu(\xi', \xi') \leq c\,AA^*$ où $c \in \mathbb{R}_+$. Soit $A' = (A'_{(x,t)})$ un élément de $\mathrm{End}_{\Lambda'}(H')$ alors pour tout $x \in G^{(0)}$, l'opérateur décomposable dans H_x associé à la famille $A'_{(x,t)}$ commute avec T_x, de plus $A = (A_x)_{x\in G^{(0)}}$ définit un élément de $\mathrm{End}_\Lambda(H)$. On obtient ainsi un isomorphisme de $\mathrm{End}_{\Lambda'}(H')$ sur le centralisateur de φ. Sa surjectivité résulte de la décomposabilité dans H_x de tout opérateur qui commute avec T_x. Q.E.D.

Démontrons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un poids φ diagonalisable soit tel que σ^φ soit intégrable. Se donner une base (discrète ou continue) de H revient à écrire l'espace Λ-aléatoire H sous la forme $H = L^2 \bullet F$ où F est un foncteur mesurable propre de G dans la catégorie des espaces mesurés. Nous dirons que l'opérateur positif $T = (T_x)_{x\in G^{(0)}}$ de degré 1, est diagonal dans cette base si il existe une fonction mesurable ρ sur $X = \cup F(x)$ telle que pour tout x, T_x soit l'opérateur de multiplication par ρ dans $L^2(F(x))$. Comme T est de degré 1 on a :

$$\rho(\gamma^{-1} z) = \delta(\gamma)\,\rho(z) \qquad \forall\,\gamma : x \to y\,, \quad \forall\, z \in F(y)\,.$$

Théorème 12. Soit T un opérateur positif de degré 1, diagonalisable, de l'espace Λ-aléatoire H dans lui-même. Pour que σ^φ, $\varphi = \varphi_T$, soit intégrable il faut et il suffit que, pour Λ-presque tout $x \in G^{(0)}$, la mesure spectrale de T_x soit absolument continue.

Démonstration. Soient $\nu \in \mathcal{E}^+$ une fonction transverse fidèle sur G, P l'algèbre de von Neumann intégrale directe des $\mathcal{L}(H_x)$ selon Λ_ν, et E_ν le poids opératoriel canonique de P sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$. On a $H = L^2 \bullet F$ avec F propre, soit donc f une fonction mesurable bornée sur $X = \bigcup\limits_{x=G^{(0)}} F(x)$, telle que $\nu * f \le 1$. Le Lemme 9 montre que l'opérateur de multiplication $M(f)$ est dans le domaine du poids opératoriel E_ν. De plus, comme T est diagonal, $M(f)$ commute avec T, le résultat découle donc du lemme suivant :

Lemme 13. Soient N et M des algèbres de von Neumann, $N \subset M$ et E un poids opératoriel normal fidèle de M sur N, φ un poids normal fidèle sur N et $\psi = \varphi \bullet E$. On suppose que le domaine de E (i.e. $\{x \in M^+, E(x) \in N_+\}$) contient une famille filtrante croissante $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ avec $x_\alpha \in M_\psi$, $\forall\,\alpha \in I$ (ici M_ψ désigne le centralisateur de ψ). Alors pour que le groupe σ^φ soit intégrable ([9]) il faut et il suffit que σ^ψ le soit.

Démonstration. Si σ^φ est intégrable, il existe une famille filtrante croissante d'éléments de N^+, $(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ qui sont σ^φ-intégrables

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_t^\varphi(y_\alpha)\, dt \in N^+ \qquad \forall\,\alpha \in J\,.$$

Comme la restriction de σ^ψ à N est égale à σ^φ on voit que ψ est intégrable. Réciproquement soit $y \in M^+$, σ^ψ-intégrable, posons $y_\alpha = E(x_\alpha^{\frac12}\, y\, x_\alpha^{\frac12})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sigma_t^\varphi(y_\alpha) = E(\sigma_t^\psi(x_\alpha^{\frac12}\, y\, x_\alpha^{\frac12})) = E(x_\alpha^{\frac12}\, \sigma_t^\psi(y)\, x_\alpha^{\frac12})\,.$$

On voit donc que y_α est σ^φ-intégrable :

$$\int_{-A}^{A} \sigma_t^{\varphi}(y_\alpha)\,dt \le E\left(x_\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-A}^{A}\sigma_t^{\psi}(y)\,dt\right)x_\alpha^{\frac{1}{2}}\right).$$

Q.E.D.

Calcul du poids $\varphi_T(A) = \int \mathrm{Trace}\,(T_x\,A_x)\,d\Lambda(x) = \mathrm{Trace}_\Lambda(TA)$

Proposition 14. Gardons les notations du Lemme 9 et soient $\nu_i \in \mathcal{E}^+$, f_i fonctions mesurables positives sur $\bigcup\limits_{x\in G^{(0)}} F(x)$ avec $\Sigma\,\nu_i * f_i = 1$. Pour tout opérateur T aléatoire positif de degré 1 et tout $A \in \mathrm{End}_\Lambda(H)^+$ on a :

$$\varphi_T(A) = \sum_i \int \mathrm{Trace}\,(A_x^{\frac{1}{2}}\,M(f_i)\,A_x^{\frac{1}{2}}\,T_x)\,d\Lambda_{\nu_i}(x)\,.$$

Démonstration. On a

$$E_{\nu_i}(A^{\frac{1}{2}}\,M(f_i)\,A^{\frac{1}{2}}) = A^{\frac{1}{2}}\,E_{\nu_i}(M(f_i))\,A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}\,M(\nu_i * f_i)\,A^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\varphi_T(A^{\frac{1}{2}}\,M(\nu_i * f_i)\,A^{\frac{1}{2}}) = \int \mathrm{Trace}\,(A_x^{\frac{1}{2}}\,M(f_i)\,A_x^{\frac{1}{2}}\,T_x)\,d\Lambda_{\nu_i}(x)\,.$$

Q.E.D.

Gardons les notations ci-dessus et munissons pour tout $x \in G^{(0)}$ l'espace mesurable $F(x)$ de la mesure "*trace locale de* T_x" définie par l'égalité $\alpha_x(f) = \mathrm{Trace}\,(T_x^{\frac{1}{2}}\,M(f)\,T_x^{\frac{1}{2}})$ pour f mesurable bornée positive sur G^x. Soit F_T le foncteur $x \mapsto (F(x), \alpha_x)$ de G dans la catégorie des espaces mesurés.

Corollaire 15. On a

$$\varphi_T(1) = \int F_T\,d\Lambda\,.$$

Démonstration. Soit f une fonction mesurable positive sur $\bigcup\limits_{G^{(0)}} F(x)$ telle que $\nu * f = 1$. La Proposition 14 montre que :

$$\varphi_T(1) = \int \mathrm{Trace}\,(M(f)\,T_x)\,d\Lambda_\nu(x) = \int \alpha_x(f)\,d\Lambda_\nu(x) = \int F_T\,d\Lambda$$

(cf. Numéro III). Q.E.D.

Soient $E = (E_x)_{x\in G^{(0)}}$ un champ mesurable d'espaces hilbertiens sur $G^{(0)}$ et pour $x \in G^{(0)}$, H_x l'espace des sections de carré intégrable pour ν^x ($\nu \in \mathcal{E}^+$ fixée) de $s^*(E)$, avec

$$\|\xi\|^2 = \int_{G^x} \|\xi(\gamma)\|^2\,d\nu^x(\gamma)\,.$$

Les translations à gauche définissent une représentation de carré intégrable de G dans $H = (H_x)_{x \in G^{(0)}}$.
Pour tout $x \in G^{(0)}$, soit δ_x^{-1} l'opérateur de multiplication par δ^{-1} dans $H_x = L^2(G^x, \nu^x, s^*(E))$.

Corollaire 16. Soit $T \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$ de la forme $(T_x\,\xi)(\gamma) = \int k(\gamma^{-1}\,\gamma')\,\xi(\gamma')\,d\nu^x(\gamma')$, où k est une section mesurable du champ mesurable sur G qui à $\gamma : x \to y$ associe $E_x^* \otimes E_y$. On a

$$\int \mathrm{Trace}\,(\delta_x^{-1}\,|T_x|^2)\,d\Lambda = \int \|k(\gamma)\|_{HS}^2\,\delta^{-1}\,d(\Lambda_\nu \bullet \nu)(\gamma)\,.$$

Démonstration. Pour f comme ci-dessus et $x \in G^{(0)}$, la norme de Hilbert-Schmidt de $M(f)^{\frac{1}{2}}\,T_x\,\delta_x^{-\frac{1}{2}}$ vaut

$$\iint \|k(\gamma^{-1}\,\gamma')\|_{\mathrm{HS}}^2\,f(\gamma)\,\delta(\gamma')^{-1}\,d\nu^x(\gamma)\,d\nu^x(\gamma')\,.$$

L'égalité résulte alors de la Proposition 14. Q.E.D.

Proposition 17. Soient Λ et Λ' des mesures transverses semi-finies de module δ, δ' sur G et G' et h un homomorphisme propre de G dans G' tel que $h(\Lambda) = \Lambda'$ et $\delta = \delta' \circ h$. Soient H' un espace hilbertien Λ'-aléatoire, $H = h^*H'$, T' un opérateur aléatoire positif de degré 1 de H' dans H' et $T = h^*\,T'$. Alors T est un opérateur aléatoire positif de degré 1 de H dans H et :

$$\int \mathrm{Trace}\,(h^*\,T')\,d\Lambda = \int \mathrm{Trace}\,T'\,d\Lambda'\,.$$

Démonstration. On a

$$U(\gamma)\,T_x = U'(h(\gamma))\,T'_{h(x)} = (\delta' \bullet h)(\gamma)\,T'_{h(y)}\,U'(h(\gamma)) = \delta(\gamma)\,T_y\,U(\gamma)\,,$$

ce qui montre que T est un opérateur aléatoire positif de degré 1. Pour démontrer l'égalité cherchée on peut supposer que $H' = L^2 \bullet F'$ où F' est un foncteur propre de G' dans la catégorie des espaces mesurés. Reprenons les notations du Corollaire 15. Ainsi $F'_{T'}$ associe à $x \in G'^{(0)}$ la mesure α'^x, $\alpha'^x(f) = \mathrm{Trace}\,(M(f)\,T'_x)$ sur $F'_{(x)}$ et F_T associe $x \in G^{(0)}$ la mesure α^x, $\alpha^x(k) = \mathrm{Trace}\,(M(k)\,T_x) = \mathrm{Trace}\,(M(k)\,T'_{h(x)})$ sur $F(x) = F'(h(x))$. On a donc $F_T = F'_{T'} \bullet h$ et l'égalité cherchée résulte de III 9c). Q.E.D.

Le cas unimodulaire

Supposons que $\delta = 1$.

Définition 18. On appelle *dimension formelle* de l'espace Λ-aléatoire H le scalaire $\dim_\Lambda(H) \in [0,+\infty]$ défini par

$$\dim_\Lambda(H) = \int \mathrm{Trace}\,(1_{H_x})\, d\Lambda(x)\,.$$

Cette définition a un sens car comme $\delta = 1$ l'opérateur aléatoire $(1)_{x\in G^{(0)}}$ est de degré 1.

Proposition 19.

a) Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(H_1, H_2)$ contient un élément inversible on a

$$\dim_\Lambda(H_1) = \dim_\Lambda(H_2)\,.$$

b) $\mathrm{Dim}_\Lambda(\oplus\, H_i) = \Sigma\,\mathrm{Dim}_\Lambda(H_i)$

c) $\mathrm{Dim}_{\Sigma\Lambda_i}(H) = \Sigma\,\mathrm{Dim}_{\Lambda_i}(H)$

d) Si $h : G \to G'$ est propre et $h(\Lambda) = \Lambda'$ alors

$$\mathrm{Dim}_\Lambda(h^*\,H) = \mathrm{Dim}_{h(\Lambda)}(H)\,.$$

Démonstration. a) b) c) sont conséquences immédiates de la définition et d) résulte de la Proposition 12. Q.E.D.

Proposition 20.

a) Soit G un groupe localement compact unimodulaire, dg un choix de mesure de Haar à gauche sur G et Λ la mesure transverse telle que $\Lambda(dg) = 1$. Pour toute représentation de carré intégrable π de G, le scalaire $\dim_\Lambda(\pi)$ coïncide avec la dimension formelle usuelle de π.

b) Si $T \subset G^{(0)}$ est une transversale au groupoïde G, et ν_T sa fonction caractéristique, alors $\Lambda(\nu_T)$ est égal à $\mathrm{Dim}_\Lambda(H)$ où H est l'espace aléatoire $H_x = 1^2(T \cap G^x)$.

Démonstration. a) Pour tout $\xi \in H$ on a, avec $\nu = dg$, l'égalité $\theta_\nu(\xi,\xi) = d^{-1}\|\xi\|^2\, 1_H$ où d est la dimension formelle usuelle (cf. [13] p. 278). Ainsi pour $\|\xi\| = 1$ on a $\dim_\Lambda(H) = d\int\langle\xi_x,\xi_x\rangle\, d\Lambda_\nu(x) = d$.

b) Soit k la fonction sur G qui vaut 0 si $\gamma \notin G^{(0)}$ ou si $\gamma \notin T$ et vaut 1 si $\gamma \in T$. Le Corollaire 15 montre que $\lambda(\nu_T) = \int \mathrm{Trace}\,(A_x)\, d\Lambda(x)$, où pour tout $x \in G^{(0)}$, A_x est donné par la matrice diagonale $(\gamma,\gamma') \to k(\gamma^{-1}\,\gamma')$ agissant dans $1^2(G^x \cap s^{-1}(T))$. Comme $\gamma,\gamma' \in s^{-1}(T)$ on a $k(\gamma^{-1}\,\gamma') = 0$ si $\gamma \neq \gamma'$ et $k(\gamma^{-1}\,\gamma') = 1$ si $\gamma = \gamma'$ donc $A_x = 1_{H_x}$. Q.E.D.

Nous explicitons maintenant les résultats de la théorie de Breuer [6] dans le cadre ci-dessus. Soit H un espace Λ-aléatoire, alors la fermeture normique de l'idéal de définition de la trace : Trace_Λ sur $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ est l'ensemble des $T \in \mathrm{End}_\Lambda(H)$ tel que $\dim_\Lambda E_a(|T|) < \infty$, où $E_a(|T|)$ est le projecteur spectral de $|T|$ associé à $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$. Nous dirons qu'un opérateur Λ-aléatoire T est Λ-*compact* s'il est dans l'idéal bilatère ci-dessus. Un Λ-*opérateur à indice* de H_1 dans H_2 est un opérateur Λ-aléatoire $T \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1,H_2)$ inversible modulo les opérateurs Λ-compacts. On a alors :

$$\mathrm{Dim}_\Lambda(\mathrm{Ker}\, T) < \infty\,,\ \mathrm{Dim}_\Lambda(\mathrm{Ker}\, T^*) < \infty$$

et on pose

$$\mathrm{Ind}_\Lambda(T) = \mathrm{Dim}_\Lambda(\mathrm{Ker}\, T) - \mathrm{Dim}_\Lambda(\mathrm{Ker}\, T^*)\,.$$

On a alors :

Proposition 21 ([6]).

a) Soient T_1, T_2 des Λ-opérateurs à indice, on a alors

$$\mathrm{Ind}_\Lambda(T_1 \bullet T_2) = \mathrm{Ind}_\Lambda(T_1) + \mathrm{Ind}_\Lambda(T_2)\,.$$

b) L'application $T \to \mathrm{Ind}_\Lambda(T) \in \mathbb{R}$ est continue quand on munit $\mathbb{R}$ de la topologie *discrète* et l'ensemble des Λ-opérateurs à indice de la topologie normique.

c) Soient T un Λ-opérateur à indice et K un opérateur Λ-compact, alors $\mathrm{Ind}_\Lambda(T+K) = \mathrm{Ind}_\Lambda(T)$.

8 Mesures transverses et feuilletages

Soit $(V, \mathcal{F})$ une variété feuilletée ; l'espace Ω des feuilles est un espace mesurable singulier (image de V par la projection p qui à $x \in V$ associe la feuille de x). Le groupoïde d'holonomie G du feuilletage (construit par Winkelnkemper [48]) donne une désingularisation naturelle de Ω. On dispose donc d'une notion de mesure généralisée sur Ω que nous relions à la notion classique de mesure transverse à un feuilletage.

La présence de la topologie dans le sens transverse suggère que l'espace Ω est un "espace localement compact singulier". Ceci se traduit par l'existence d'une C^*-algèbre canoniquement associée au feuilletage, et qui dans le cas où $\mathcal{F}$ est de dimension 0 se réduit à l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur V. L'analogue du lien entre mesures de Radon sur un espace localement compact Ω (i.e. formes linéaires positives sur $C_c(\Omega)$) et mesures sur Ω est alors la correspondance entre mesures transverses localement finies pour le feuilletage et traces sur $C^*(V, \mathcal{F})$. (Poids dans le cas non unimodulaire.)

Feuilletages de classe $C^{\infty,0}$ (notations)

Soient $p, q, n \in \mathbb{N}$, T un ouvert de $\mathbb{R}^p$, U un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et f une application de $T \times U$ dans $\mathbb{R}^n$; nous dirons que f est de classe $C^{\infty,0}$ si l'application $u \in U \mapsto f(\cdot, u)$ est continue de U dans $C^\infty(T, \mathbb{R}^n)$. Il revient au même de dire que les dérivées partielles $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t,u)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ dépendent continûment de $(t,u) \in T \times U$. Une variété feuilletée $(V, \mathcal{F})$ de classe $C^{\infty,0}$ est donnée par un atlas, chaque système de coordonnées locales étant un homéomorphisme d'un ouvert Ω de l'espace topologique V avec un ouvert $T \times U$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et chaque changement de carte étant localement de la forme

$$t' = \varphi(t,u) \qquad u' = \Gamma(u)$$

où φ est de classe $C^{\infty,0}$ et Γ est un homéomorphisme local. Par hypothèse V est une variété topologique de dimension $p + q$, mais l'atlas ci-dessus dote l'ensemble sous-jacent à V d'une structure de variété (en général non connexe) de dimension p, obtenue en remplaçant la topologie usuelle de $\mathbb{R}^q$ par la topologie discrète (cf. [4], n$^{\mathrm{o}}$ 2, p. 29). On obtient ainsi la *variété feuille* $\mathcal{F}$ qui est par construction de classe C^∞. On appelle *feuille* du feuilletage toute composante connexe de la variété feuille. Notre but est d'étudier la relation d'équivalence sur V qui correspond à la partition de V en feuilles. Soit A un ouvert de V ; pour $x, y \in A$, nous écrirons $x \sim y\,(A)$ ssi x et y sont sur la même feuille du feuilletage restriction de $\mathcal{F}$ à A. Si A est le domaine d'un système de coordonnées locales $A \approx T \times U$, avec T connexe, les classes d'équivalence de la relation $x \sim y\,(A)$ sont de la forme $T \times \{u\}$, $u \in U$, et seront appelées les *plaques* de A.

Nous dirons qu'une fonction f sur V est de classe $C^{\infty,0}$ si, dans tout système de coordonnées locales (t,u), la fonction $f(t,u)$, $(t,u) \in T \times U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est de classe $C^{\infty,0}$. Les considérations de [1], p. 123, s'adaptent facilement pour définir les notions de fibré vectoriel E de classe $C^{\infty,0}$ sur V, ainsi que l'espace $C^{\infty,0}(V, E)$ (ou simplement $C^{\infty,0}(E)$) des sections de classe $C^{\infty,0}$ d'un tel fibré.

Groupoïde d'holonomie (ou graphe) d'un feuilletage

Soient $(V, \mathcal{F})$ une variété feuilletée de classe $C^{\infty,0}$ et $\mathcal{R} \subset V \times V$ la relation d'équivalence sur V qui correspond à la partition en feuilles. La présence d'holonomie conduit (voir Winkelnkemper [48]) à remplacer $\mathcal{R}$ par un groupoïde G, tel que $G^{(0)} = V$ et que $\mathcal{R}$ soit l'image de G par le couple d'applications $(r, s) : G \to V \times V$. L'avantage de G sur $\mathcal{R}$ étant l'existence sur G d'une structure de variété (connexe si V est connexe) compatible avec sa structure de groupoïde.

Appelons (cf. [20], p. 369) *application distinguée* toute application π d'un ouvert V dans $\mathbb{R}^q$ qui est localement de la forme $\pi(t, u) = h(u)$ avec h un homéomorphisme de $\mathbb{R}^q$. Soient D l'ensemble des germes d'applications distinguées de V dans $\mathbb{R}^q$ et σ l'application qui à un germe associe sa source. Munissons D de la structure de variété de dimension p ($= \dim \mathcal{F}$), qui fait de σ un revêtement de la variété feuille $\mathcal{F}$ (cf. [20], p. 378).

Soit alors γ un chemin continu tracé sur $\mathcal{F}$ de x à y ; l'holonomie $h(\gamma)$ est l'application qui à tout $\pi \in \sigma^{-1}\{x\}$ associe l'extrémité $\pi' = h(\gamma)\,\pi$ du relevé d'origine π du chemin γ dans la variété D. On a $\pi' \in \sigma^{-1}\{y\}$. Le groupoïde des germes d'homéomorphismes φ de $\mathbb{R}^q$ agit transitivement, par composition, sur $\sigma^{-1}\{x\}$, et on a :

$$h(\gamma)\,\varphi \circ \pi = \varphi \circ h(\gamma)\,\pi\,.$$

Notons aussi que $h(\gamma_1 \circ \gamma_2) = h(\gamma_1) \circ h(\gamma_2)$ si γ_1 et γ_2 sont composables, et que $h(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ.

Définition 1. Le *groupoïde d'holonomie* $G = \mathrm{Hol}(\mathcal{F})$ de $(V, \mathcal{F})$ est le quotient du groupoïde fondamental de $\mathcal{F}$ par la relation qui identifie γ_1 et γ_2 ssi $h(\gamma_1) = h(\gamma_2)$.

En particulier, pour $x \in G^{(0)} = V$, le groupe $G_x^x = G_{\{x\}}$ est le groupe d'holonomie du feuilletage au point x. Soient $x, y \in G^{(0)} = V$; pour qu'il existe $\gamma \in G$ avec $s(\gamma) = x$, $r(\gamma) = y$ il faut et il suffit que x et y soient sur la même feuille. Ainsi l'image de G dans $V \times V$ par l'application (r, s) est égale à $\mathcal{R}$.

Décrivons maintenant un atlas sur G qui le munit d'une structure de variété (non toujours séparée) de dimension $\dim G = 2p + q$ et d'un feuilletage $\mathcal{G}$ de classe $C^{\infty,0}$ et de codimension q.

Lemme 2. Soit $\gamma : x \to y$ un chemin continu tracé sur $\mathcal{F}$. Il existe alors $s_i \in [0, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n$ et des applications distinguées $\pi_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^q$ tels que toute plaque $p = \pi_i^{-1}(u)$ de Ω_i rencontre une et une seule plaque de Ω_{i+1}, $p' = \pi_{i+1}^{-1}(u)$, et que $\gamma(t) \in \Omega_i$ pour tout $t \in [s_i, s_{i+1}]$. On a alors $h(\gamma)\,\pi_{0,x} = \pi_{n,y}$ et pour tous $x', y' \in V$, $x' \in \Omega_0$, $y' \in \Omega_n$ tels que $\pi_0(x') = \pi_n(y')$ il existe γ' avec $h(\gamma')\,\pi_{0,x'} = \pi_{n,y'}$.

Preuve. Soient Ω, Ω' des ouverts distingués (i.e. des domaines de systèmes de coordonnées locales) ; nous écrirons $\Omega \lhd \Omega'$ ssi $\Omega \subset \Omega'$ et l'intersection avec Ω

de toute plaque de Ω' est connexe, i.e. est une plaque de Ω. On a alors pour $x, y \in \Omega : x \sim y(\Omega') \Leftrightarrow x \sim y(\Omega)$.

Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement fini de $\{\gamma(t), t \in [0,1]\}$ par des ouverts distingués relativement compacts de V. Soient d une distance sur V définissant la topologie de $K = \overline{\cup V_\alpha}$, et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\alpha \in A$ avec $B(\gamma(t), \varepsilon) \subset V_\alpha$ ($B(x, \varepsilon) = \{y \in V, d(y,x) < \varepsilon\}$). Pour $t \in [0,1]$, soient α avec $B(\gamma(t), \varepsilon) \subset V_\alpha$, W_t un ouvert distingué contenant $\gamma(t)$, de diamètre inférieur à $\varepsilon/2$ avec $W_t \triangleleft V_\alpha$, et I_t un intervalle ouvert contenant t avec $\gamma(I_t) \subset W_t$. Choisissons ainsi $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, V_{α_i} et W_{t_i} de sorte que les I_{t_i} recouvrent $[0,1]$. Montrons qu'une plaque p de W_{t_j} rencontre au plus une plaque de W_{t_i}. Soient $x, y \in W_{t_i} \cap p$. Comme le diamètre de p est inférieur à $\varepsilon/2$, on a $p \subset V_{\alpha_i}$ car $B(\gamma(t_i), \varepsilon) \subset V_{\alpha_i}$, et $W_{t_i} \subset B(\gamma(t_i), \varepsilon/2)$. Ainsi x et y sont sur la même plaque de V_{α_i} et donc de W_{t_i}, d'où le résultat. Quitte à supprimer une réunion de plaques dans chaque $W_{t_i} = \Omega_i$ on peut supposer que toute plaque de Ω_i rencontre une plaque de Ω_{i+1}. On construit alors par récurrence des applications distinguées π_i de domaine Ω_i, qui donnent la même image dans $\mathbb{R}^q$ aux plaques adjacentes de Ω_i et Ω_{i+1}, et on vérifie les conditions du lemme. Q.E.D.

Nous dirons que deux systèmes de coordonnées locales $\Omega \approx T \times U$, $\Omega' \approx T' \times U$ dans V sont *compatibles* si, en désignant par π (resp. π') l'application distinguée $\pi(t,u) = u$ (resp. $\pi'(t',u') = u'$), il existe pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $y \in \Omega'$ tels que $\pi(x) = \pi'(y)$ un chemin γ sur $\mathcal{F}$ tel que $h(\gamma)\, \pi_x = \pi'_y$. Soit alors

$$W(\pi', \pi) = \{\gamma \in G\,,\ s(\gamma) = x \in \Omega\,,\ r(\gamma) = y \in \Omega'\,,\ h(\gamma)\, \pi_x = \pi'_y\}$$

et associons à $\gamma \in W$ le triplet (t', t, u) obtenu à partir des coordonnées $x = (t,u)$, $y = (t', u)$. On obtient ainsi une bijection de W sur $T' \times T \times U$; de plus le Lemme 2 montre que G est la réunion des W ; on a donc bien un atlas, et il reste à calculer les changements de cartes.

Avec les notations évidentes, soit $\gamma \in W(\pi', \pi) \cap W(\pi'_1, \pi_1)$, $\gamma : x \to y$. Soit Γ un homéomorphisme de $\mathbb{R}^q$ tel que $\Gamma \circ \pi_x = \pi_{1,x}$. Comme $h(\gamma)\, \pi_x = \pi'_y$ et $h(\gamma)\, \pi_{1,x} = \pi'_{1,y}$ on a $\Gamma \circ \pi'_y = \pi'_{1,y}$. Ainsi localement le changement de coordonnées est de la forme

$$u_1 = \Gamma(u)\,,\ t'_1 = \varphi'(t', u)\,,\ t_1 = \varphi(t, u)$$

où φ' et φ sont de classe $C^{\infty,0}$. On a donc :

Proposition 3.

a) Muni de l'atlas ci-dessus G est une variété de dimension $2p + q$, munie d'un feuilletage $\mathcal{G}$ de classe $C^{\infty,0}$ et de codimension q.
b) Les applications r, s de G dans $G^{(0)} = V$ sont continues et ouvertes.
c) L'application $\circ$ de $G^{(2)}$ dans G est continue et s'écrit localement $(t'', t', u) \circ (t', t, u) = (t'', t, u)$.
d) Pour tout $x \in V$, l'application s de G^x sur la feuille de x est le revêtement associé au groupe d'holonomie.

L'algèbre des opérateurs régularisants

Nous supposerons pour simplifier les notations que le groupoïde d'holonomie G du feuilletage $(V, \mathcal{F})$ est séparé, les démonstrations s'appliquant au cas général. L'algèbre $C_c^{\infty,0}(V, \mathcal{F})$ ci-dessous eut se définir de manière canonique en utilisant, à la place de fonctions sur G, des sections du fibré $|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{G}$ des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\mathcal{G}$. Pour les notations il est cependant plus simple de fixer une fois pour toutes une section α de classe $C^{\infty,0}$, strictement positive en tout point, du fibré $|\Lambda|\,\mathcal{F}$ sur V. Soit alors $\nu = s^*(\alpha)$ la fonction transverse sur G qui à $x \in G^{(0)} = V$ associe la mesure ν^x correspondant à la densité d'ordre 1, $s^*(\alpha)$ provenant de α par le revêtement $s : G^x \to \mathcal{F}$. Soit $C_c^{\infty,0}(G)$ l'espace des fonctions de classes $C^{\infty,0}$ (relativement à la structure feuilletée $(G, \mathcal{G})$) et à support compact sur G.

Proposition 4. Muni du produit $(f_1, f_2) \mapsto f_1 *_\nu f_2$ et de l'involution $f \mapsto f^\vee$, l'espace $C_c^{\infty,0}(G)$ est une algèbre involutive.

Preuve. Il s'agit de montrer que $f_1 *_\nu f_2 \in C_c^{\infty,0}(G)$. Comme $\operatorname{Supp}(f_1 *_\nu f_2) \subset \operatorname{Supp}(f_1) \circ \operatorname{Supp}(f_2)$, le c) de la Proposition 3 montre que $\operatorname{Supp}(f_1 *_\nu f_2)$ est compact. Vérifions que $f_1 *_\nu f_2$ est de classe $C^{\infty,0}$. On a

$$(f_1 *_\nu f_2)(\gamma) = \int f_1(\gamma_1)\, f_2(\gamma_1^{-1}\,\gamma)\, d\nu^y(\gamma_1)\,.$$

En utilisant une partition de l'unité de classe $C^{\infty,0}$ dans G, on peut supposer que $f_i \in C_c^{\infty,0}(W(\pi_i', \pi_i))$, $i = 1, 2$ avec les notations de la Proposition 3 où π_1, π_1' (π_2, π_2') sont les applications distinguées associées aux couples de systèmes de coordonnées compatibles $\Omega_1 \approx T_1 \times U_1$, $\Omega_1' \approx T_1' \times U_1 \ldots$. Ainsi dans la formule ci-dessus, $s(\gamma_1)$ varie dans le compact K de $\Omega_2' \cap \Omega_1$ intersection de $s(\operatorname{Supp}(f_1))$ avec $r(\operatorname{Supp}(f_2))$. Utilisant une partition de l'unité dans K (et remplaçant f_1 par $(\varphi \circ s)\, f_1$), on peut donc supposer que les applications distinguées π_2' et π_1 coïncident sur K. On a alors :

$$(f_1 *_\nu f_2)(t'', t, u) = \int f_1(t'', t', u)\, f_2(t', t, u)\, \alpha |dt'|$$

en coordonnées locales, où $\alpha = \alpha\,(t', u)$ est un coefficient de classe $C^{\infty,0}$ devant la densité $|dt'|$. Il est alors immédiat que $f_1 *_\nu f_2$ est de classe $C^{\infty,0}$. Q.E.D.

Proposition 5.

a) Pour tout $x \in V = G^{(0)}$ l'application R_x qui à $f \in C_c^{\infty,0}(G)$ associe $R_x(f) = R_\nu^\nu(f)_x$ est une représentation involutive non dégénérée de $C_c^{\infty,0}(G)$ dans $L^2(G^x, \nu^x)$.

b) Le commutant de R_x est engendré par les $L(\gamma)$, $\gamma \in G_x^x$.

c) Pour que R_x soit non disjointe de R_y, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma : x \to y$, $\gamma \in G$; $L(\gamma)$ est alors une équivalence entre R_x et R_y.

Preuve. Avec les notations de la Proposition IV.5, on a pour $f \in C_c^{\infty,0}(G)$, $(\nu, \nu, f) \in L^1(G)$; la Proposition IV.6 montre donc que R_x est une représentation involutive de $C_c^{\infty,0}(G)$ dans $L^2(G^x,\nu^x)$. Comme dans la Proposition IV.15, l'image de R_x engendre le commutant de $\{L(\gamma), \gamma \in G_x^x\}$ dans $L^2(G^x,\nu^x)$. En particulier R_x et non dégénérée. Il reste à montrer que R_x est disjointe de R_y quand $x \not\sim y(G)$. Soit $T \neq 0$ un opérateur d'entrelacement entre R_x et R_y, et soit $\zeta \in L^2(G^x,\nu^x)$, nul hors d'un compact K de G^x, tel que $\eta = T\zeta \neq 0$. Comme R_y est non dégénérée, il existe $f \in C_c^{\infty,0}(G)$ telle que $R_y(f)\,T\zeta \neq 0$. Pour toute fonction φ de classe $C^{\infty,0}$ sur $V = G^{(0)}$ on a $f(\varphi \circ s) \in C_c^{\infty,0}(G)$ et

$$(R_y(f\varphi \circ s)\,\eta)\,(\gamma) = \int f(\gamma^{-1}\,\gamma')\,\varphi(s(\gamma'))\,\eta(\gamma')\,d\nu^y(\gamma')\,.$$

Si $x \not\sim y(G)$, le compact $s(K) \subset V$ est disjoint de $s(G^y)$; il existe donc $\varphi \in C_c^{\infty,0}(G)$ nulle sur $s(K)$ et telle que $R_y(f\varphi \circ s)\,\eta \neq 0$. (Si $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $\varphi_n \to 1$ simplement sur $s(G^y)$, on a $R_y(f\varphi_n \circ s)\,\eta \to \eta$.) Comme $\varphi \circ s$ est nulle sur K on a $R_x(f\varphi \circ s)\,\zeta = 0$ ce qui contredit l'égalité

$$R_y(f\varphi \circ s)\,\eta = T R_x(f\varphi \circ s)\,\zeta\,.$$

Q.E.D.

Nous introduisons maintenant la C^*-algèbre qui joue le rôle de l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini, sur l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$.

Définition 6. Soit $C^*(V,\mathcal{F})$ la C^*-algèbre complétée de l'algèbre involutive $C_c^{\infty,0}(G)$ pour la norme $\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x\in V} \|R_x(f)\|$.

Bien entendu chaque représentation R_x, $x \in V$, se prolonge en une représentation de $C^*(V,\mathcal{F})$ et la Proposition 5 reste valable pour cette extension.

Pour tout ouvert Ω de V soit $C^*(\Omega,\mathcal{F})$ la C^*-algèbre construite à partir de la restriction de $\mathcal{F}$ à Ω.

Proposition 7.

a) Soit $\Omega \approx T \times U$ un système de coordonnées locales (T connexe) ; alors $C^*(\Omega,\mathcal{F})$ s'identifie au produit tensoriel de $C_0(U)$ par la C^*-algèbre élémentaire des opérateurs compacts dans $L^2(T)$.

b) Avec les notations ci-dessus, l'application naturelle de $C_c^{\infty,0}(T \times T \times U)$ dans $C_c^{\infty,0}(G)$ se prolonge en un homomorphisme isométrique de $C^*(\Omega,\mathcal{F})$ dans $C^*(V,\mathcal{F})$.

Preuve. a) Le groupoïde d'holonomie de $(\Omega,\mathcal{F})$ s'identifie à $T \times T \times U$. Un élément k de $C_c^{\infty,0}$ est donc en particulier une application continue à support compact U dans $C_c^\infty(T \times T) \subset \mathcal{K}$, algèbre des opérateurs compacts dans $L^2(T)$. On a donc une inclusion naturelle de $C^*(\Omega,\mathcal{F})$ dans $C_0(U) \otimes \mathcal{K}$. Pour vérifier qu'elle est surjective, il suffit de vérifier que $f \otimes k$ est dans son image, pour $f \in C_0(U)$ et $k \in \mathcal{K}$; or c'est immédiat car $C_c^\infty(T \times T)$ est dense en norme dans $\mathcal{K}$.

b) Soit $W \approx T \times T \times U$ le sous-ensemble de G des γ de la forme (t', t, u) ; c'est un sous-groupoïde ouvert de G. Soit $x \in V$; dans $s^{-1}(\Omega) \cap G^x$ la relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ssi $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in W$ est donc une relation d'équivalence ; chaque classe d'équivalence ℓ est ouverte (car W est ouvert) et est connexe (car T est connexe). L'ensemble $\mathcal{L}$ de ces classes est donc la partition de $s^{-1}(\Omega) \cap G^x$ en composantes connexes. La restriction de s à $\ell \in \mathcal{L}$ est un homéomorphisme de ℓ sur la plaque $p = s(\ell)$ de Ω. En effet, si $\gamma_1, \gamma_2 \in \ell$ et $s(\gamma_1) = s(\gamma_2)$ on a $\gamma_1^{-1}\gamma_2 = (t,t,u) \in G^{(0)}$, d'où $\gamma_1 = \gamma_2$.

Identifions $W = T \times T \times U$ au groupoïde d'holonomie de la restriction de $\mathcal{F}$ à Ω ; l'inclusion i de $C_c^{\infty,0}(W)$ dans $C_c^{\infty,0}(G)$ est alors un homomorphisme d'algèbres involutives. Soit $x \in V$; montrons que $R_x \circ i$ est équivalente, comme représentation de $C_c^{\infty,0}(W)$, à une somme directe de représentations R_{x_i}, $x_i \in W$ avec la représentation dégénérée 0. Soient $k \in C_c^{\infty,0}(W)$ et $f \in L^2(G^x, \nu^x)$; on a :

$$(R_x(k)\,f)\,(\gamma) = \int k(\gamma^{-1}\gamma')\,f(\gamma')\,d\nu^x(\gamma')\,.$$

Pour $\gamma, \gamma' \in G^x$ on a $k(\gamma^{-1}\gamma') \neq 0$ seulement si $\gamma^{-1}\gamma' \in W$, donc si $\gamma \sim \gamma'$ au sens ci-dessus, i.e. si γ et γ' sont dans la même composante connexe $\ell \in \mathcal{L}$ de $s^{-1}(\Omega) \cap G^x$. Cela montre que $R_x(k)$ est décomposable dans la décomposition de $L^2(G^x, \nu^x)$ associée à la partition $G^x = (s^{-1}(\Omega)^c \cap G^x) \cup \left(\bigcup_{\ell \in \mathcal{L}} \ell\right)$.

La restriction de $R_x(k)$ à $s^{-1}(\Omega)^c \cap G^x$ est nulle. Soit $\ell \in \mathcal{L}$; alors s est un homéomorphisme de ℓ sur la plaque $p = s(\ell)$ de Ω, ce qui montre que $R_x \circ i$ restreint à $L^2(\ell)$ est équivalente à R_a pour tout $a \in p$.

On a montré que i se prolonge en une isométrie de $C^*(\Omega, \mathcal{F})$ dans $C^*(V, \mathcal{F})$.

Q.E.D.

Mesures transverses et feuilletages

Soient $(V, \mathcal{F})$ une variété feuilletée de classe $C^{\infty,0}$ et G son groupoïde d'holonomie. Nous relions ci-dessous la notion de mesure transverse sur G aux quatre aspects suivants de la notion de mesure transverse au feuilletage (cf. [29], [36] et [45]) :

1) Une mesure de Radon sur la réunion des sous-variétés transverses à $\mathcal{F}$ invariante (resp. quasi-invariante) par le pseudo-groupe d'holonomie.
2) Pour toute mesure de Radon, transversalement mesurable, ν sur la variété feuille $\mathcal{F}$, une mesure μ sur V ayant ν comme mesure conditionnelle (resp. $\delta^{-1}\nu$).
3) Un courant fermé C (resp. vérifiant $bC = \omega \wedge C$ où ω est une 1-forme fermée sur $\mathcal{F}$) sur V positif dans le sens des feuilles.
4) Une trace (resp. un poids KMS) sur la C^*-algèbre $C^*(V, \mathcal{F})$.

Rappelons que si X est un espace localement compact (à base dénombrable), une mesure de Radon (positive) sur X est une mesure positive sur la tribu des boréliens, qui est *localement finie*, au sens où $\mu(f) < \infty$, pour toute f bornée à support compact.

Définition 8. Une mesure transverse Λ sur G est dite *localement finie* ssi $\Lambda(\nu) < \infty$, pour tout $\nu \in \mathcal{E}^+$ *localement bornée* (i.e. $\operatorname{Sup} \nu^x(K) < \infty$ pour tout compact K de G) et à *support compact* (i.e. il existe un compact $K_1 \subset V$ avec ν^x portée par $s^{-1}(K_1)$ pour tout $x \in V$).

Soit $Z \subset V$ une sous-variété de dimension q de V ; nous dirons que Z est *transverse* à $\mathcal{F}$, si pour tout $z \in Z$ il existe une application distinguée $\pi : \Omega \to U$, $z \in \Omega$ dont la restriction à $Z \cap \Omega$ est un homéomorphisme. Le pseudo-groupe d'holonomie opère sur la réunion disjointe des sous-variétés transverses à $\mathcal{F}$ (cf. [29]).

Lemme 9. Soient Z_1, Z_2 des sous-variétés transverses à $\mathcal{F}$, $\phi : Z_1 \to Z_2$ un élément du pseudo-groupe d'holonomie, K_1 un compact de Z_1 et $K_2 = \phi(K_1)$. Soit λ le noyau sur G défini par $\lambda^y = 0$ si $y \notin K_2$ et $\lambda^y = \varepsilon_{\Gamma(y)}$ si $y \in K_2$, où $\Gamma(y)$ désigne le germe de ϕ au point $\phi^{-1}(y)$. On a alors

$$\nu_{K_2} * \lambda = \nu_{K_1} \,.$$

Preuve. On a

$$\nu_{K_2}^y = \sum_{s(\gamma) \in K_2} \varepsilon_\gamma \,,$$

donc

$$(\nu_{K_2} * \lambda)^y = \sum_{s(\gamma) \in K_2} L_\gamma \, \lambda^x = \sum_{s(\gamma) \in K_2} \varepsilon_{\gamma \Gamma(x)}$$

L'application qui à $\gamma \in G^y$, $s(\gamma) \in K_2$, associe $\gamma \Gamma(s(\gamma))$ est une bijection de $G^y \cap s^{-1}(K_2)$ sur $G^y \cap s^{-1}(K_1)$ car $K_2 = \phi(K_1)$. On a donc

$$(\nu_{K_2} * \lambda)^y = \sum_{s(\gamma') \in K_1} \varepsilon_{\gamma'} = \nu_{K_1}^y \,.$$

Q.E.D.

Proposition 10.

a) Soit Λ une mesure transverse localement finie, de module δ sur G. Pour toute sous-variété Z transverse à $\mathcal{F}$, l'égalité $\tau(K) = \Lambda(\nu_K)$, K compact de Z, définit une mesure de Radon positive sur Z ; pour tout élément ϕ du pseudo-groupe d'holonomie, on a :

$$d\tau(\phi(x))/d\tau(x) = \delta(\phi_x) \qquad \phi_x = \text{germe de } \phi \text{ en } x.$$

b) La correspondance $\Lambda \mapsto \tau$ est une bijection entre mesures transverses localement finies de module δ sur G et mesures de Radon sur la réunion des sous-variétés transverses vérifiant a).

Preuve. Comme ν_K est localement finie à support compact, on a $\Lambda(\nu_K) < \infty$ et l'existence de τ en résulte. Avec les notations du Lemme 9, on a

$$\tau(K_1) = \Lambda(\nu_{K_1}) = \Lambda(\nu_{K_2} * \lambda) = \Lambda((\lambda(\delta^{-1}) \circ s)\, \nu_{K_2}) = \int_{K_2} \delta^{-1}(\Gamma(x))\, d\tau(x)\,.$$

Ainsi :

$$\int_{\phi(K_1)} d\tau(\phi^{-1}(x)) = \int_{\phi(K_1)} \delta^{-1}(\Gamma(x))\, d\tau(x) = \int_{\phi(K_1)} \delta(\Gamma(x)^{-1})\, d\tau(x)\,,$$

d'où le résultat car $\Gamma(x)^{-1}$ est le germe de ϕ^{-1} au point x. Nous avons montré a).

Pour b), soit $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de V par des ouverts distingués $\Omega_\alpha \approx T_\alpha \times U_\alpha$; associons à chaque Ω_α une sous-variété transverse $Z_\alpha = \{(t(u), u)\,,\ u \in U_\alpha\}$. Le sous-ensemble $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$ de $V = G^{(0)}$ est alors une transversale au sens du numéro I. Le Corollaire III.5 montre la bijectivité de $\Lambda \mapsto \tau$. Q.E.D.

Pour toute mesure de Radonn α sur la variété feuille $\mathcal{F}$, soit $\nu = s^*(\alpha)$ l'application qui à $x \in G^{(0)} = V$ associe la mesure relevée de α sur G^x par le revêtement s. On a par construction $\gamma\, \nu^x = \nu^y$ pour tout $\gamma \in G$, $\gamma : x \to y$. Nous dirons que α est *transversalement mesurable* si sa restriction à tout domaine $\Omega \approx T \times U$ d'un système de coordonnées locales est donnée par une application vaguement mesuarble $u \mapsto \alpha_u$ de U dans l'espace des mesures de Radon sur T, bornée si Ω est relativement compact.

Lemme 11. L'application $\alpha \mapsto s^*(\alpha)$ est une bijection entre mesures de Radon transversalement measurables sur $\mathcal{F}$ et fonctions transverses ν sur G telles que $\operatorname{Sup} \nu^x(K) < \infty$ pour tout compact K de G.

Preuve. Soit $\nu \in \mathcal{E}^+$ telle que $\operatorname{Sup} \nu^x(K) < \infty$ pour tout compact K de G. Pour tout $x \in G^{(0)}$, ν^x est localement finie sur G^x ; c'est donc une mesure de Radon. Comme ν^x est invariante par G_x^x elle est de la forme $\nu^x = s^*(\alpha)$, ce qui en faisant varier x détermine une mesure de Radon α sur $\mathcal{F}$. Pour $\Omega \approx T \times U$ le groupoïde d'holonomie $W = T \times T \times U$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ est un sous-groupoïde ouvert de G et pour $f \in C_c^+(W)$, l'application $x \mapsto \nu^x(f)$ est measurable car $\nu \in \mathcal{E}^+$, ce qui montre que α est transversalement mesurable. Q.E.D.

Proposition 12. Soient α et $\nu = s^*(\alpha)$ comme ci-dessus, et supposons que le support de α soit égal à $\mathcal{F}$. L'application $\Lambda \mapsto \Lambda_\nu$ est une bijection entre mesures transverses localement finies de module δ sur G et mesures de Radon μ sur V ayant la propriété suivante : dans toute désintégration de μ dans un système de coordonnées locales $\Omega \approx T \times U$ selon l'application distinguée $\pi(t,u) = u$, les mesures conditionnelles sont de la forme : $d\mu_u = e^L\, d\alpha_u$, où $L : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie $L(y) - L(x) = \log(\delta(\gamma))$ pour tout $\gamma \in W = T \times T \times U \subset G$.

Preuve. Comme Λ est localement finie, la mesure $\mu = \Lambda_\nu$ est aussi localement finie ; c'est donc une mesure de Radon sur V. On a $(\mu \circ \nu)\,\tilde{f} = (\mu \circ \nu)\,\delta^{-1} f$ pour toute fonction mesurable positive f sur G ; en prenant f nulle hors de $W = T \times T \times U$ et en utilisant les coordonnées locales, on a donc :

$$\iint f(t,t',u)\,d\alpha_u(t)\,d\mu(t',u) = \iint (\delta^{-1} f)(t',t,u)\,d\alpha_u(t)\,d\mu(t',u)\,.$$

Soit alors $\mu = \int \mu_u\,d\rho(u)$ une désintégration de μ relativement à Ω. L'égalité ci-dessus montre que (ρ-presque partout) $d\mu_u$ est proportionnelle à $e^L\,d\alpha_u$ (où L vérifie la condition ci-dessus), car

$$e^L\,d\alpha_u(t)\,d\mu_u(t') = e^L\,d\alpha_u(t')\,d\mu_u(t)\,.$$

Réciproquement, soit μ une mesure de Radon sur V vérifiant la condition de désintégration indiquée ; montrons que $(\mu \circ \nu)\,\tilde{f} = (\mu \circ \nu)\,\delta^{-1} f$ pour toute f ; le Théorème II.3 permettra de conclure.

On peut supposer que f est nulle hors de l'ouvert

$$W = \{\gamma \in G\,,\ x = s(\gamma) \in \Omega_0\,,\ y = r(\gamma) \in \Omega_n\,,\ h(\gamma)\,\pi_{0,x} = \pi_{n,y}\}$$

de G défini dans le Lemme 2. Par hypothèse, ayant choisi une désintégration de μ dans Ω_0 sous la forme

$$\mu = \int e^L\,\alpha_u\,d\rho_0(u) \qquad L_0 : \Omega_0 \to \mathbb{R}$$

il existe pour $k = 1, \ldots, n$ une unique désintégration de μ dans Ω_k sous la forme

$$\mu = \int e^{L_k}\,\alpha_u\,d\rho_k(u)$$

où $L_k : \Omega_k \to \mathbb{R}$ est déterminée par l'égalité $L_k(y) = L_0(x) + \operatorname{Log}\delta(\gamma)$ pour $\gamma : x \to y$, $h(\gamma)\,\pi_{0,x} = \pi_{k,y}$. Il nous suffit donc de montrer que $\rho_0 = \rho_n$, i.e. que $\rho_k = \rho_{k+1}$ pour tout k. Sur $\Omega_k \cap \Omega_{k+1}$ on a $L_k = L_{k+1}$ par construction, donc

$$\int e^L\,\alpha_u\,d(\rho_k - \rho_{k+1})(u)\,.$$

Comme $\pi_k^{-1}(u) \cap \pi_{k+1}^{-1}(u)$ est de mesure non nulle pour α pour tout $u \in U$, il en résulte $\rho_k = \rho_{k+1}$. Q.E.D.

Supposons maintenant que $\operatorname{Log}\delta$ est de la forme $(\operatorname{Log}\delta)(\gamma) = \int_\gamma \omega$, où $\omega \in C_c^{\infty,0}(T^*\mathcal{F})$ et une 1-forme fermée sur $\mathcal{F}$.

Proposition 13.

a) Pour toute mesure transverse localement finie, de module δ sur G, l'égalité $\Lambda(s^*(\alpha)) = C(\alpha)$ détermine une forme linéaire positive C sur l'espace $C_c^{\infty,0}(|\Lambda|\,\mathcal{F})$ des densités d'ordre 1 sur $\mathcal{F}$, et on a :

$$C(\partial_X\,\alpha) = -C(\langle X,\omega\rangle\,\alpha) \quad \text{pour tout} \quad X \in C_c^{\infty,0}(T\,\mathcal{F})$$

(où ∂_X désigne la dérivée de Lie relative à X).

b) L'application $\Lambda \mapsto C$ ci-dessus est bijective.

Si $\omega = 0$ et si $\mathcal{F}$ est orientée tangentiellement, l'égalité ci-dessus s'écrit $C(d\beta) = 0$ pour toute section β de classe $C^{\infty,0}$ de $\Lambda^{p-1}(T^*\mathcal{F})$, $p = \dim\mathcal{F}$. En effet, on peut identifier grâce à l'orientation $\Lambda^p\,T\mathcal{F}$ et $|\Lambda|\,\mathcal{F}$ et on a $\partial_X = di_X + i_X\,d$. On retrouve ainsi la correspondance de Ruelle et Sullivan ([36], [45]) entre courants fermés sur V, de même dimension que celle des feuilles, tels que toute forme α, dont la restriction à $\mathcal{F}$ est positive, vérifie $C(\alpha) \geq 0$, et mesures transverses invariantes par holonomie.

Preuve de 13. a) Pour montrer que $C(\partial_X\,\alpha) = -C(\langle X,\omega\rangle\,\alpha)$, on peut supposer que α est nulle hors du domaine d'un système (t,u) de coordonnées locales. Il existe alors une mesure de Radon ρ sur U telle que (cf. Proposition 12) :

$$\Lambda(s^*\alpha) = \int_U \left(\int_{T\times\{u\}} e^L\,\alpha \right) d\rho(u)$$

où $dL = \omega$ sur $T \times \{u\}$, pour $u \in U$. Munissons $\mathbb{R}^p$ et donc aussi T de son orientation canonique. Soit $\beta \in C^{\infty,0}(\Lambda^{p-1}\,T^*\mathcal{F})$ nul hors de $\Omega = T \times U$; alors $C(e^{-L}\,d(e^L\,\beta)) = \int_U \int_{T\times\{u\}} d(e^L\,\beta)\,d\rho(u) = 0$. Ainsi $C(d'\beta) = 0$ où $d'\beta = d\beta + \omega \wedge \beta$. On a alors $C(\partial_X\,\alpha) = C(di_X\,\alpha) = -C(\omega \wedge i_X\,\alpha) = -C(\langle X,\omega\rangle\,\alpha)$.

b) Montrons la surjectivité de l'application $\Lambda \mapsto C$. Soit donc C vérifiant la condition a). Le calcul ci-dessus montre que C est localement de la forme $C(\alpha) = \int_U \int_{T\times\{u\}} e^L\,\alpha\,d\rho(u)$ où $dL = \omega$. On applique alors la Proposition 12 en ayant choisi une section $\alpha \in C^{\infty,0}(|\Lambda|\,\mathcal{F})$ strictement positive en tout point. L'égalité $\mu(f) = C(f\alpha)$ définit une mesure de Radon sur V qui vérifie les conditions de 12 relativement à $\nu = s^*(\alpha)$; il existe donc Λ avec $\Lambda(s^*(f\alpha)) = \mu(f) = C(f\alpha)$, $f \in C_c^{\infty,0}(V)$. Q.E.D.

Reprenons les notations de la Proposition 4. Soit $\delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ un homomorphisme de classe $C^{\infty,0}$ et pour tout $x \in V = G^{(0)}$ soit δ_x^{-1} l'opérateur de multiplication par δ^{-1} dans $L^2(G^x)$. Par construction $(\delta_x^{-1})_{x\in V}$ est de degré 1 aus sens de VI.1.

Proposition 14.

a) Soit Λ une mesure transverse localement finie, de module δ, sur G. L'égalité

$$\varphi(f) = \int \mathrm{Trace}\,(\delta_x^{-1}\, R_x(f))\, d\Lambda$$

détermine un poids semi-continu semi-fini sur $C^*(V, \mathcal{F})$.

b) Toute $f \in C_c^{\infty,0}(G)$ est dans le domaine de φ et on a

$$\varphi(f) = \int_{G^{(0)}} f\, d\Lambda_\nu\,.$$

c) φ vérifie les conditions modulaires par rapport au groupe σ_t d'automorphismes de $C^*(V, \mathcal{F})$ défini par $\sigma_t(f) = \delta^{it} f$ pour tout $f \in C_c^{\infty,0}(G)$.

Preuve. a) Pour $f \in C^*(V, \mathcal{F})$, la famille $R(f) = (R_x(f))_{x\in V}$ est un élément de $\mathrm{End}_G((L^2(G^x))_{x\in V})$ (Proposition IV.6.d) et Théorème V.4). L'opérateur homogène de degré 1, $(\delta_x^{-1})_{x\in V}$ détermine un poids normal semi-fini sur $\mathrm{End}_\Lambda((L^2(G^x))_{x\in V})$ qui, composé avec R, vérifie a). Il est donc clair que φ est semi-continu ; sa semi-finitude résultera de b), et c) résulte du Corollaire VI.5.

b) La Proposition VIII.6.b) (indépendante de celle-ci) montre que f est dans le domaine de φ. Le Corollaire VI.15 montre donc qu'il suffit de calculer $\int F\, d\Lambda$, où, pour $x \in V$, $F(x)$ désigne l'espace G^x muni de la mesure "trace locale" de l'opérateur associé au noyau $\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\, f(\gamma^{-1}\gamma')\, \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}$. Comme f est de classe $C^{\infty,0}$, la théorie usuelle des opérateurs nucléaires montre que la trace locale est donnée sur G^x par la mesure $\delta(\gamma)^{-1}\, f(\gamma^{-1}\gamma')\, d\nu^x(\gamma) = (f \circ s)\, \delta^{-1}\, \nu^x$, d'où le résultat. Q.E.D.

9 Théorie de l'indice et feuilletages mesurés

Soient $(V, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et Ω l'espace des feuilles. Considérons un opérateur différentiel elliptique D (scalaire pour simplifier), sur la variété feuille $\mathcal{F}$ (i.e. localement D est de la forme $\sum\limits_{|\alpha|\leq n} a_\alpha(t,u)\,\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ où les $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\,a_\alpha$ sont continus et où le symbole principal est inversible). En supposant pour simplifier les groupes d'holonomie triviaux (cf. ci-dessous pour le cas général), on obtient un opérateur aléatoire non borné $(D_f)_{f\in\Omega}$ en associant à toute feuille $f \in \Omega$ l'opérateur fermeture dans $L^2(f)$ de D agissant sur $C_0^\infty(f)$. L'espace aléatoire $(\operatorname{Ker} D_f)_{f\in\Omega}$ est alors de carré intégrable (au sens du numéro IV), et de plus $\operatorname{Dim}_\Lambda(\operatorname{Ker} D) = \int \dim(\operatorname{Ker} D_f)\,d\Lambda$ est *fini* pour toute mesure transverse Λ au feuilletage $\mathcal{F}$, dès que V est *compacte*, ce que nous supposons désormais. On définit donc l'*indice analytique* de D par la formule

$$\operatorname{Ind}_\Lambda(D) = \operatorname{Dim}_\Lambda(\operatorname{Ker} D) - \operatorname{Dim}_\Lambda(\operatorname{Ker} D^*)\,.$$

Nous démontrons, grâce à la méthode du développement asymptotique de la trace de l'opérateur de diffusion e^{-tDD^*}, l'ananlogue de la formule de l'indice d'Atiyah et Singer.

Supposons $\mathcal{F}$ orienté (tangentiellement) ; les trois ingrédients sont alors :

1) La classe d'homologie $[C] \in H_p(V, \mathbb{R})$ du courant de Ruelle et Sullivan associé à Λ.
2) La classe de cohomologie $\operatorname{ch} D \in H^*(V, \mathbb{Q})$ calculée exactement comme dans le cas classique grâce à l'isomorphisme de Thom de $H^*(V)$ avec $H^*(B,S)$ où B (resp. S) désigne le fibré en boules unités (resp. en sphères) de $T\mathcal{F}$, et à l'élément de K-théorie relative associée au symbole principal de D.
3) La classe de Todd $\operatorname{Td}(V)$ de la variété V.

La formule de l'indice est

$$\operatorname{Ind}_\Lambda(D) = (\operatorname{ch} D \cdot \operatorname{Td}(V))\,[C]\,.$$

A droite Λ n'intervient que par la classe d'homologie de C, ce qui n'est nullement évident dans le terme de gauche.

Nous donnons quelques applications simples de ce résultat : l'égalité

$$\sum (-1)^i\,\beta_i(\Lambda) = \langle e(\mathcal{F}), [C]\rangle$$

où les $\beta_i(\Lambda)$ ne dépendent pas du choix auxiliaire d'une métrique Riemannienne sur $\mathcal{F}$, et le lemme qui dit que $\beta_0(\Lambda)$ est nul si et seulement si l'ensemble des feuilles compactes d'holonomie finie est Λ-négligeable ; ils se combinent dans le cas où $\dim \mathcal{F} = 2$ pour montrer que, si l'ensemble des feuilles compactes d'holonomie finie est Λ-négligeable, on a $\langle e(\mathcal{F}), [C]\rangle \leq 0$, i.e. l'intégrale de la courbure intrinsèque des feuilles est négative.

Même dans le cas des flots, i.e. en dimension 1 pour $\mathcal{F}$, cette formule donne des résultats intéressants, l'irrationalité de la classe $[C] \in H_1(V, \mathbb{R})$ donnant une borne inférieure sur le rang du groupe abélien dénombrable $K_0(C^*(V, \mathcal{F}))$.

Calcul pseudodifférentiel invariant à gauche

Supposons G séparé. Soient E, F des fibrés hermitiens de dimension finie de classe $C^{\infty,0}$ sur V. Appelons *G-opérateur* de E dans F toute famille invariante à gauche $(P_x)_{x\in V}$ où, pour tout x, P_x est une application linéaire continue de $C^\infty(G^x, s^*(E))$ dans $C^\infty(G^x, s^*(F))$. L'invariance à gauche de P montre qu'il existe une distribution k sur $\mathcal{G}$ telle que, pour tout $x \in V$, le noyau distribution associé à P_x (dans G^x muni de la densité ν^x) soit $K(\gamma,\gamma') = k(\gamma^{-1}\gamma')$. Nous dirons qu'un G-opérateur P est *régularisant* si $k \in C_c^{\infty,0}$, i.e. s'il existe une section de classe $C_c^{\infty,0}$ du fibré sur G dont la fibre en $\gamma : x \to y$ est $E_x^* \otimes F_y$ telle que

$$(P_x\,\zeta)(\gamma) = \int k(\gamma^{-1}\,\gamma')\,\zeta(\gamma')\,d\nu^x(\gamma') \qquad \text{pour tout} \qquad \zeta \in C^\infty\,.$$

Si K est un compact de G, nous dirons que le *support* de P est dans K quand la distribution k est nulle hors de K, i.e. quand

$$\operatorname{Supp}(P^x\,\zeta) \subset \operatorname{Supp}\zeta \circ K^{-1} \qquad \text{pour tout} \qquad \zeta \in C^\infty\,.$$

On a $\operatorname{Supp} P_1 \circ P_2 \subset \operatorname{Supp} P_1 \circ \operatorname{Supp} P_2$ pour P_1, P_2 à supports compacts. Comme dans le cas du calcul pseudodifférentiel usuel, nous dirons qu'un G-opérateur P est *pseudolocal* si, pour tout voisinage S de $G^{(0)}$, il existe un G-opérateur régularisant R avec $\operatorname{Supp}(P+R) \subset S$. Nous écrirons $P_1 \sim P_2$ si $P_1 - P_2$ est régularisant.

Soient $\Omega \approx T \times U$ un ouvert distingué (T connexe) et $\mathcal{P}_c^m(\Omega, E, F)$ l'espace des familles continues $(P_u)_{u\in U}$ d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre $\leq m$, où $P_u : C^\infty(T\times\{u\}, E) \to C^\infty(T\times\{u\}, F)$ et où le noyau distribution $k \in C^{-\infty,0}(T\times T\times U)$ associé à P est à support compact. L'injection naturelle de $T\times T\times U$ dans G permet de considérer k comme une distribution sur $\mathcal{G}$; décrivons maintenant le G-opérateur $P' = (P'_x)_{x\in V}$ associé à cette distribution. La preuve de la Proposition VII.7.b montre que, si $G^x \cap s^{-1}(\Omega) = \bigcup_{\mathcal{L}} \ell$ est la décomposition de $G^x \cap s^{-1}(\Omega)$ en composantes connexes, l'opérateur P'_x est nul sur $G^x \cap s^{-1}(\Omega)^c$, et se décompose selon la partition $\mathcal{L}$, la restriction de P'_x à ℓ étant la relevée par le difféomorphisme s de P_u, agissant sur $s(\ell) = T\times\{u\}$.

Nous appellerons *G-opérateur pseudodifférentiel* toute combinaison linéaire finie d'opérateurs de la forme P' ci-dessus et d'opérateurs régularisants. Par construction un tel opérateur et pseudolocal et à support compact. Notons $\mathcal{P}^m(E,F)$ l'espace des G-opérateurs pseudodifférentiels d'ordre $\leq m$ de E dans F. L'espace $\mathcal{P}^{-\infty}(E,F)$ est celui des opérateurs régularisants.

Proposition 1.

a) On a $\mathcal{P}^m \circ \mathcal{P}^n \subset \mathcal{P}^{m+n}$ pour tous m et n.
b) Si $P \in \mathcal{P}^0(E,F)$, la famille $(P_x)_{x\in V}$ se prolonge en un opérateur d'entrelacement borné de $L^2(G,\nu,s^*(E))$ dans $L^2(G,\nu,s^*(F))$.
c) Si $P \in \mathcal{P}^m(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $m<0$, on a $P \in C^*(V,\mathcal{F})$.

d) Si $P \in \mathcal{P}^m(E,F)$, $m < -p/2$ ($p = \dim \mathcal{F}$), le noyau distribution associé est une fonction mesurable sur G avec

$$\operatorname*{Sup}_y \int \|k(\gamma^{-1})\|_{HS}^2 \, d\nu^y(\gamma) < \infty \, .$$

Preuve. a) Supposons d'abord $n = -\infty$. On peut alors supposer que $P' \in \mathcal{P}^m$ provient d'une famille continue $P \in \mathcal{P}_c^m(\Omega, E, F)$. L'argument de la Proposition VII.4 montre que l'on peut supposer f nulle hors de $W' = T \times T' \times U$ où $\Omega' \approx T' \times U$ est compatible avec $\Omega \approx T \times U$. Le noyau associé à $P \circ f$ est alors de la forme

$$k_1(t, t'', u) = \int k(t, t', u) \, f(t', t'', u) \, \alpha |dt'|$$

et il est donc de classe $C^{\infty,0}$. Ayant traité ce cas (ainsi que le cas analogue où $m = -\infty$), on peut supposer que $P' \in \mathcal{P}^m$ et $Q' \in \mathcal{P}^n$ sont tous les deux construits à partir de familles continues $P, Q \in \mathcal{P}_c(\Omega, E, F)$, pour le même ouvert distingué $\Omega \approx T \times U$. L'assertion résulte alors du cas classique [1].

b) On peut supposer que l'opérateur est de la forme P' pour $P \in \mathcal{P}_c^0(\Omega, E, F)$. L'assertion résulte alors de l'inégalité $\|P'_x\| \leq \operatorname{Sup} \|P_u\|$.

c) Cela résulte de la Proposition VII.7.b) et de la continuité, pour $P \in \mathcal{P}_c^m(\Omega, \mathbb{C}, \mathbb{C})$, de l'application $u \mapsto P_u$ de U dans l'algèbre des opérateurs compacts sur $L^2(T)$.

d) Il suffit de montrer le résultat pour P', avec $P \in \mathcal{P}_c^m(\Omega, E, F)$. On a alors

$$k(t, t', u) = \int e^{i\langle t - t', \zeta \rangle} \, a(t, \zeta, u) \, d\zeta \, ,$$

où $\|a_{t,u}\|_2^2 = \int |a(t, \zeta, u)|^2 \, |d\zeta|$ est majoré uniformément, vu l'ordre de l'amplitude a : $|a(t, \zeta, u)| \leq c \, (1 + |\zeta|)^m$. L'égalité de Parseval montre donc que

$$\int |k(t, t', u)|^2 \, dt' = \|a_{t,u}\|_2^2$$

est majoré uniformément. Q.E.D.

Soit P un G-opérateur de E dans F ; on lui associe un opérateur $s(P)$ de $C^\infty(\mathcal{F}, E)$ dans $C^\infty(\mathcal{F}, F)$ en posant pour $\varphi \in C^\infty(\mathcal{F}, E)$ et $x \in \mathcal{F}$:

$$(s(P) \, \varphi)(x) = P_y(\varphi \circ s)(\gamma) \qquad \text{pour tout} \qquad \gamma \in G \, , \ \gamma : x \to y \, .$$

L'invariance à gauche de P montre que le résultat ne dépend pas du choix de $\gamma : s(\gamma) = x$. Par construction $s(P_1 \circ P_2) = s(P_1) \circ s(P_2)$ et $s(P)$ est pseudodifférentiel si P est pseudodifférentiel. Si $S \subset G$ est un voisinage ouvert de $G^{(0)}$ tel que $(r, s) : S \to V \times V$ soit injective, la restriction de s à $\{P \, , \ \operatorname{Support} P \subset S\}$ est injective.

Soit $P \in \mathcal{P}^m(E, F)$ un G-opérateur pseudodifférentiel de E dans F ; définissons le *symbole principal* de P comme celui de l'opérateur $s(P)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Si P

est régularisant et associé à k, l'opérateur $s(P)$ est associé au noyau $k'(y,x) = \sum k(\gamma) \in E_x^* \otimes E_y$ (somme sur les $\gamma : x \to y$) ; c'est donc un opérateur régularisant et son symbole principal σ_m est nul pour tout m. On en déduit alors que, pour $P \in \mathcal{P}^m(E,F)$, $\sigma_m(P)$ est une fonction de classe $C^{\infty,0}$ sur l'ensemble des éléments non nuls de $T^*\mathcal{F}$. On définit l'*ellipticité* de P par l'invertibilité de $\sigma_m(P)$ ou, ce qui revient au même, par l'ellipticité de $s(P)$.

Proposition 2. Soit $P \in \mathcal{P}^m(E,F)$ un G-opérateur elliptique de E dans F. Alors il existe un G-opérateur elliptique Q de F dans E tel que $PQ - \mathrm{id}_F$ et $QP - \mathrm{id}_E$ soient régularisants.

Preuve. Soient $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement de V par des ouverts distingués $\Omega_i \approx T_i \times U_i$, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité de classe $C^{\infty,0}$ subordonnée à ce recouvrement et S un voisinage compact de $G^{(0)}$ dans G tel que l'on ait pour tout $i \in I$

$$\{\gamma \in S\,,\ s(\gamma) \subset \mathrm{Support}\,\varphi_i'\} \subset W_i = T_i \times T_i \times U_i$$

où $\varphi_i' \in C_c^{\infty,0}(\Omega_i)$ vaut 1 sur le support de φ_i. On peut supposer que $\mathrm{Supp}\,P \subset S$. Pour tout i, soit $\varphi_i' \circ s$ le G-opérateur de E dans E de multiplication par $\varphi_i' \circ s$; la distribution k_i associée à $P \circ (\varphi_i' \circ s)$ a son support contenu dans W_i ; il existe donc $P_i \in \mathcal{P}^m(\Omega_i, E, F)$ tel que $P_i' = P \circ (\varphi_i' \circ s)$. La multiplicativité du symbole principal (qui résulte du cas usuel appliqué à $\mathcal{F}$) montre que $\sigma_m(P_i') = \sigma_m(P)\,\varphi_i'$; d'où l'existence, pour chaque i, de $Q_i \in \mathcal{P}^{-m}(\Omega_i, E, F)$ avec $P_i\,Q_i - \varphi_i$ régularisant. L'opérateur $Q = \sum(\varphi_i' \circ s) \circ Q_i'$ est alors un quasi-inverse à droite, d'où le résultat. Q.E.D.

Corollaire 3. Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^m(E,F)$ avec P_2 elliptique ; il existe alors $c < \infty$ tel que

$$\|P_{1,x}\,\zeta\| \le c\,(\|P_{2,x}\,\zeta\| + \|\zeta\|)$$

pour tout $x \in V$ et pour tout $\zeta \in C_c^\infty(G^x)$.

Preuve. Soit $Q_2 \in \mathcal{P}^{-m}(F,E)$ avec $Q_2\,P_2 - \mathrm{id}_E$ régularisant. Comme $P_1\,Q_2 \in \mathcal{P}^0$ il existe (Proposition 1) $c_1 < \infty$ avec $\|P_1\,Q_2(P_2\,\zeta)\| \le c_1 \|P_2\,\zeta\|$ pour tout $\zeta \in C_c^\infty$. Comme $P_1(Q_2\,P_2 - \mathrm{id}_E)$ est régularisant, on a $\|P_1\,Q_2\,P_2\,\zeta - P_1\,\zeta\| \le c_2\|\zeta\|$ pour tout $\zeta \in C_c^\infty$, d'où le résultat. Q.E.D.

Action d'un G-opérateur elliptique dans L^2

Soient G, E et F comme ci-dessus avec $\nu = s^*(\alpha)$. Comme V est compacte la notion de section de carré intégrable de $s^*(E)$ sur G^x a un sens intrinsèque, i.e. qui ne dépend ni du choix de $\alpha \in C_+^{\infty,0}(|\Lambda|\,\mathcal{F})$ ni de celui de la structure hermitienne sur E. Plus précisément, si E et E_1 ont même fibré vectoriel sous-jacent et si $\nu = s^*(\alpha)$, $\nu_1 = s^*(\alpha_1)$, l'application identique de $L^2(G^x, \nu^x, s^*(E))$ dans $L^2(G^x, \nu_1^x, s^*(E_1))$ est un opérateur d'entrelacement inversible.

Soit D un G-opérateur différentiel elliptique, d'ordre m, de E dans F. La discussion du § 2 de [2] s'applique mot pour mot à l'opérateur D_x agissant sur

G^x ; de plus, comme dans la Proposition 3.1 de [2], la définition de D_x comme opérateur fermé à domaine dense de $L^2(G^x, s^*(E))$ dans $L^2(G^x, s^*(F))$ se fait sans ambiguité :

Proposition 4. Pour tout $x \in V$, le domaine de la fermeture de la restriction de D_x à $C_c^\infty(G^x, s^*(E))$ coïncide avec $\{\zeta \in L^2(G^x, s^*(E))\,,\ D_x\,\zeta \in L^2(G^x, s^*(E))\}$ (avec D_x au sens des distributions).

Preuve. La Proposition 2 et l'argument de la Proposition 3.1 de [2] permettent de supposer que $\zeta \in C^\infty \cap L^2$ pour montrer qu'il existe une suite $\zeta_n \in C_c^\infty$ avec $\zeta_n \to \zeta$, $D_x\,\zeta_n \to D_x\,\zeta$. Avec les notations de la Proposition 2, il existe pour tout $i \in I$ une constante $c < \infty$ telle que

$$\|D_x \circ (\varphi_i \circ s)\,\zeta\| \leq c\,(\|(\varphi_i' \circ s) \circ D_x\,\zeta\| + \|(\varphi_i' \circ s)\,\zeta\|)$$

pour tout $\zeta \in L^2(G^x, s^*(E))$. Cela résulte de la théorie usuelle des opérateurs elliptiques avec paramètres. On peut ainsi supposer que ζ est nul sur $s^{-1}(\Omega_i)^c \cap G^x$ et comme les composantes connexes de $s^{-1}(\Omega_i) \cap G^x$ sont relativement compactes et D_x local, le résultat est alors évident. Q.E.D.

Nous noterons encore D_x l'opérateur fermé défini dans la Proposition 4. Si D^* désigne l'adjoint formel de D, la Proposition 4 montre que D_x^* est l'adjoint de D_x pour tout x. Ainsi $\Delta_x = (D^* \circ D)_x$ est autoadjoint ; comme $\Delta_x \subset D_x^*\,D_x$, on voit que $\Delta_x = D_x^*\,D_x = |D_x|^2$.

Proposition 5. Soit g une structure riemannienne orientée sur $\mathcal{F}$, de classe $C^{\infty,0}$. Pour $i = 0, 1, \ldots, p$ soit Δ_i le G-opérateur laplacien sur les formes de degré i : $\Delta_i : E \to E$, $E = \Lambda^i\,T^*\,\mathcal{F}$.

a) Toute forme harmonique ($\omega \in \operatorname{Ker} \Delta_i^x$) de carré intégrable sur G^x est fermée et cofermée.
b) La représentation de carré intégrable $H^i = \operatorname{Ker} \Delta_i$ de G ne dépend pas du choix de g.
c) Pour $x \in V$, on a $H_x^0 = \mathbb{C}$ si la feuille de x est compacte d'holonomie finie et $H_x^0 = \{0\}$ sinon.

Preuve. a) Soit $\alpha \in C^{\infty,0}(|\Lambda|\,\mathcal{F})$ la densité associée à g sur $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in V$ munissons G^x de la structure riemannienne relevée par s de celle de $\mathcal{F}$. Soit E le fibré vectoriel de classe $C^{\infty,0}$ sur V égal à $\Lambda\,T^*\mathcal{F}$; alors le relevé s^*E sur G^x s'identifie à $\Lambda\,T^*G^x$. Avec $\nu = s^*\alpha$, soit T_x l'opérateur fermeture de $d : C_c^\infty(G^x, s^*E) \to C_c^\infty(G^x, s^*E)$ dans $L^2(G^x, \nu^x)$. On a $\operatorname{Im} T_x \subset \operatorname{Ker} T_x$, donc $T_x^*\,T_x + T_x\,T_x^*$ est autoadjoint. Soient δ l'adjoint formel de d et Δ le G-opérateur différentiel $d\delta + \delta d$; comme il est elliptique, Δ_x est autoadjoint dans $L^2(G^x, \nu^x)$ et coïncide donc avec $T_x^*\,T_x + T_x\,T_x^*$, d'où le résultat.

b) Pour $x \in V$ et avec les notations évidentes, soit P_x la restriction à $H_x^i = \operatorname{Ker} \Delta_{i,x}$ de la projection orthogonale sur le sous-espace fermé $H_x^{i'}$ de $L^2(G^x, \nu'^x, s^*(E))$. L'application identique de $L^2(G, \nu, s^*(E))$ dans $L^2(G, \nu',\ s^*(E))$ étant bornée,

$P = (P_x)_{x \in V}$ est un opérateur d'entrelacement borné : $P \in \mathrm{Hom}_G(H^i, H'^i)$. Pour $\omega \in H_x^i$ on a $P_x\,\omega - \omega \in \overline{\mathrm{Im}\, T_x}$ et

$$P_x' P_x\,\omega - \omega \in \overline{\mathrm{Im}\, T_x} \cap \mathrm{Ker}\, \Delta_{i,x} = \{0\}\,.$$

Ainsi P et inversible.

c) Si G^x est compact, l'espace H_x^0 des fonctions harmoniques sur G^x est égal à $\mathbb{C}$. Si G^x n'est pas compact, il est de volume infini car toute feuille de $\mathcal{F}$ qui est de volume fini est précompacte et donc compacte (étant automatiquement complète). L'assertion de a) montre que toute fonction harmonique de carré intégrable sur G^x est constante et donc nulle. Q.E.D.

Soit D un G-opérateur elliptique de E dans F comme ci-dessus. Pour tout $x \in V$, $\Delta_x = D_x^*\, D_x$, soit W_s^x l'espace hilbertien obtenu en complétant le domaine de $(1+\Delta_x)^{s/2m}$ pour la norme $\zeta \mapsto \|(1+\Delta_x)^{s/2m}\,\zeta\|$. La représentation de G dans W_s par translations à gauche est par construction équivalente à $L^2(G, \nu, s^*(E))$.

Le Corollaire 3 montre que tout opérateur $P \in \mathcal{P}^s(E,E)$ elliptique ($s \in \mathbb{N}$), l'application identique définit un opérateur d'entrelacement borné inversible de W^s dans le domaine de P muni de la norme $\|\zeta\| + \|P\,\zeta\|$. Il en résulte que tout $Q \in \mathcal{P}^m(E,F)$ se prolonge pour tout s en un opérateur d'entrelacement borné de $W^{s+m}(E)$ dans $W^s(F)$.

Proposition 6.

a) Soit $\Omega \approx T \times U$ un ouvert distingué ; il existe $c > 0$ tel qu'on ait pour tout $P \in \mathcal{P}_c^m(\Omega, E, F) : \|P'\|_{W^s, W^{s'}} \leq c\ \mathrm{Sup}\, \|P_u\|_{s,s'}$.

b) Soit Λ une mesure transverse localement finie de module $\delta \in C^{\infty,0}$ sur G et soit φ le poids sur $M = \mathrm{End}_\Lambda(L^2(G, \nu, s^*(E)))$ associé à δ^{-1}. Il existe $c < \infty$ tel que tout $T \in M$ qui se prolonge continûment de $W^{-s}(E)$ à $W^s(E)$ ($s > p = \dim \mathcal{F}$) soit dans le domaine de φ, avec $|\varphi(T)| \leq c\,\|T\|_{W^{-s}, W^s}$.

Preuve. a) On doit évaluer la norme de $(1+\Delta)^{s'/2m}\,P(1+\Delta)^{-s/2m}$; on remplace alors $(1+\Delta)^{s'/2m}$ et $(1+\Delta)^{-s/2m}$ par des opérateurs pseudodifférentiels à supports suffisamment voisins de $G^{(0)}$ et on utilise la démonstration de la Proposition VII.7.b).

b) Il existe $S \in M$ tel que $T = (1+\Delta)^{-s/2m}\,S(1+\Delta)^{-s/2m}$ avec $\|S\| = \|T\|_{-s,s}$. Il suffit donc de montrer que $(1+\Delta)^{-s/m} \in \mathrm{Domaine}\,(\varphi)$. Soit (Corollaire 3) P un G-opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-s$ avec $(1+\Delta)^{-s/m} \leq P^*P$. Il suffit de montrer que $\varphi(P^*P) < \infty$, ce qui résulte de la Proposition 1.d) et du Corollaire VI.16. Q.E.D.

Développement asymptotique de $\varphi\,(e^{-t\Delta})$

Soient Λ une mesure transverse localement finie de module $\delta \in C^{\infty,0}$ sur G et D un G-opérateur différentiel elliptique d'ordre m de E dans F, avec $\Delta = D^*D$. L'opérateur $s(\Delta)$ sur la variété feuille $\mathcal{F}$ est égal à $s(D)^*s(D)$ avec $s(D)$

elliptique. La théorie classique donne donc, par un calcul local sur $\mathcal{F}$, une suite de mesures de Radon $(\nu_k)_{k=-p,\dots}$ sur $\mathcal{F}$ que nous considérerons (Lemme VII.11) comme des fonctions transverses sur G.

Théorème 7. Soit φ le poids sur $M = \mathrm{End}_\Lambda(L^2(G, s^*(E)))$ associé à δ^{-1}. Pour $t > 0$ on a $\varphi(e^{-t\Delta}) < \infty$ et le développement asymptotique

$$\varphi(e^{-t\Delta}) \sim \sum_{k \geq -p} t^{k/2m} \, \Lambda(\nu_k) \, .$$

Preuve. La Proposition 6.b) montre que $e^{-t\Delta} \in \mathrm{Domaine}(\varphi)$ pour tout $t > 0$. Le Corollaire VI.15 montre que, si $T \in \mathrm{End}_\Lambda(L^2(G), s^*(E))$ est dans le domaine de φ, on a $\varphi(T) = \Lambda(\nu_T)$, où ν_T désigne la fonction transverse telle que ν_T^x soit la trace locale de T_x sur G^x. Soit $k \in \mathbb{N}$ et cherchons à estimer $\varphi(e^{-t\Delta})$ à $0(t^k)$ près. Soient $s > p$ et (φ_Ω) une partition de l'unité de classe $C^{\infty,0}$ dans V subordonnée à un recouvrement formé d'ouverts distingués $\Omega \approx T \times U$.

Pour tout Ω on construit comme dans la théorie classique [18] une famille analytique $D_\lambda^\Omega \in \mathcal{P}_c^{-2m}(\Omega, E, F)$ indexée par $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+^*$, telle que, en désignant encore par Δ la restriction de Δ aux $T \times \{u\}$, $u \in U$, on ait :

$$\|D_\lambda^\Omega(\Delta - \lambda) - \varphi_\Omega\|_{-s,s} \leq c_\Omega(1 + |\lambda|)^{-k-1} \, .$$

Soit alors $D_\lambda'^\Omega$ le relevé de D_λ^Ω en un G-opérateur $D_\lambda'^\Omega \in \mathcal{P}^{-2m}(E, E)$. La Proposition 6.a) montre donc que

$$\|D_\lambda'^\Omega(\Delta - \lambda) - \varphi_\Omega \circ s\|_{-s,s} \leq c'_\Omega(1 + |\lambda|)^{-k-1} \, .$$

Avec $D_\lambda = \sum_\Omega D_\lambda'^\Omega$, on a donc une inégalité de la forme

$$\|D_\lambda(\Delta - \lambda) - \mathrm{id}_E\|_{-s,s} \leq c_0(1 + |\lambda|)^{-k-1} \, .$$

Fixons le contour $\mathcal{C}$ autour de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ avec distance $(\mathcal{C}, \mathbb{R}_+^*) \geq 1$. On a alors, pour $\lambda \in \mathcal{C}$ et $t < 1$

$$\|D_{\lambda/t} - (\Delta - \lambda/t)^{-1}\|_{-s,s} \leq c_0(1 + |\lambda/t|)^{-k-1}$$

d'où

$$\|e^{-t\Delta} - E(t)\|_{-s,s} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\mathcal{C} |e^{-\lambda}| \, (1 + |\lambda/t|)^{-k-1} \, |d\lambda/t|$$

où

$$E(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_\mathcal{C} D_\lambda \, e^{-\lambda t} \, d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_\mathcal{C} D_{\lambda/t} \; e^{-\lambda} \; \frac{d\lambda}{t}$$

par analyticité de la famille D. Ainsi :

$$t^{-k}\|E(t) - e^{-t\Delta}\|_{-s,s} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\mathcal{C} |e^{-\lambda}| \, (t + |\lambda|)^{-k-1} \, |d\lambda|$$

reste borné quand $t \to 0$. La Proposition 6.b) montre donc que

$$\varphi(e^{-t\Delta}) - \varphi(E(t)) = 0(t^k)\,.$$

On a alors

$$\varphi(E(t)) = \sum_{\Omega} \varphi\left(E^{\Omega}(t)\right)$$

où

$$E^{\Omega}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{-\lambda t}\, D_{\lambda}'^{\Omega}\, d\lambda\,.$$

Il suffit donc de savoir que le développement asymptotique de la trace locale de $E^{\Omega}(t)$, considérée comme une mesure de Radon sur $\mathcal{F}$, est de la forme $\sum t^{k/2m}\, \varphi_{\Omega}\, \nu_k$, ce qui résulte de la construction de D_{λ}^{Ω} (cf. [18], p. 62). Q.E.D.

Le cas unimodulaire

Soit Λ une mesure transverse, de module 1, localement finie sur G. Soient D un G-opérateur elliptique de degré m de E dans F et $\Delta = D^* D$ comme ci-dessus. La Proposition 6.b) montre que l'injection canonique de W_s dans $W_{s'}$, lorsque $s > s'$, est un opérateur Λ-compact, et donc que tout opérateur $P \in \mathcal{P}^k(E,F)$, $k < 0$, se prolonge en un opérateur Λ-compact de $L^2(G, s^*(E))$ dans $L^2(G, s^*(F))$. La Proposition 2 montre donc que, pour tout s, D définit un Λ-opérateur à indice de $W^{s+m}(E)$ dans $W^s(F)$. De plus, comme $\operatorname{Ker} D$ ne change pas quand on varie s, l'indice de $D : W^{s+m}(E) \to W^s(F)$ est indépendant de s et égal à $\operatorname{Dim}_{\Lambda}(\operatorname{Ker} D) - \operatorname{Dim}_{\Lambda}(\operatorname{Ker} D^*)$. La Proposition VI.21 montre que $\operatorname{Ind}_{\Lambda}(D)$ ne dépend que de la classe de K-théorie du symbole principal $\sigma_m(D)$.

Corollaire 8. Avec les notations du Théorème 7, on a

$$\operatorname{Ind}_{\Lambda}(D) = \Lambda(\nu_0(D^* D) - \nu_0(D D^*))\,.$$

Preuve. Soit $D = U\,|D|$ la décomposition polaire de l'opérateur non borné D affilié à $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(L^2(G, s^*(E)),\, L^2(G, s^*(F)))$. Pour tout borélien de $]0, +\infty[$, U est une équivalence entre les projecteurs spectraux correspondants de $D^* D$ et $D D^*$. On a donc pour $t > 0$: $\operatorname{Ind}_{\Lambda}(D) = \operatorname{Trace}_{\Lambda}(e^{-tD^*D}) - \operatorname{Trace}_{\Lambda}(e^{-tDD^*})$; on applique alors le Théorème 7. Q.E.D.

Appliquons ce résultat à l'opérateur elliptique $d + \delta$ associé à une structure riemannienne g sur $\mathcal{F}$, avec $E = \sum \Lambda^{2j}\, T^* \mathcal{F}$ et $F = \sum \Lambda^{2j+1}\, T^* \mathcal{F}$. Le calcul de la page 139 de [3] montre que, dans ce cas, $\nu_0(D^* D) - \nu_0(D D^*)$ est, en supposant pour simplifier $\mathcal{F}$ orienté, la forme différentielle $e = Pf(K/2\pi)$ où, avec les notations de la page 311 de [24], K désigne la courbure de la connexion riemannienne de la variété $(\mathcal{F}, g)$. Pour évaluer $\Lambda(e)$ en fonction de la classe d'homologie $[C]$ du courant de Ruelle et Sullivan associé à Λ, nous supposerons pour simplifier que $\mathcal{F}$ est transversalement C^{∞}.

Corollaire 9. Soient C le courant de Ruelle et Sullivan associé à Λ (cf. numéro VII), $[C] \in H_p(V,\mathbb{R})$ sa classe d'homologie, et $e(\mathcal{F}) \in H^p(V,\mathbb{R})$ la classe d'Euler ([24], p. 98) du fibré $T\mathcal{F}$ sur la variété V. Pour tout $i = 0, 1, \dots, p$, la dimension β_i de l'espace Λ-aléatoire H^i des formes harmoniques de degré i est indépendante du choix de g et

$$\sum (-1)^i \, \beta_i = \langle [C], e(\mathcal{F}) \rangle \, .$$

Preuve. La Proposition 5 montre que β_i ne dépend pas du choix de g. Soit $e_1 = Pf(K_1/2\pi)$, où K_1 désigne la courbure d'une connexion sur le fibré $T\mathcal{F}$ sur V compatible avec sa métrique. Rappelons que $T\mathcal{F}$ est supposé orienté. On a alors ([24], p. 311) $e_1 \in$ classe d'Euler de $T\mathcal{F}$. La restriction à $\mathcal{F}$ de la connexion ci-dessus est compatible avec la métrique de $T\mathcal{F}$; on en déduit donc que la restriction de e_1 à $\mathcal{F}$ diffère de e par le bord d'une forme $\omega \in C^\infty(\Lambda^{p-1} \, T\mathcal{F})$. Ainsi $\mathrm{Ind}_\Lambda(d+\delta) = \langle [C], e_1 \rangle$. Q.E.D.

Corollaire 10. Supposons $p = 2$. Si l'ensemble des feuilles compactes d'holonomie finie de $\mathcal{F}$ est Λ-négligeable, l'intégrale selon Λ de la courbure gaussienne intrinsèque des feuilles est ≤ 0, i.e. $\langle [C], e(\mathcal{F}) \rangle \leq 0$.

Preuve. La Proposition 5.c) montre que $\beta_0 = 0$ et l'opération $*$ définissant une équivalence de H^0 sur H^2 on a $\beta_2 = 0$, d'où le résultat car $\beta_1 \geq 0$. Q.E.D.

Passons maintenant au calcul de $\mathrm{Ind}_\Lambda(D)$, où D désigne un G-opérateur elliptique de E dans F. On suppose $\mathcal{F}$ orienté (tangentiellement) et on note S (resp. B) le fibré de base V formé des éléments de longueur un dans $T\mathcal{F}$ (resp. de longueur inférieure ou égale à un), relativement à une structure euclidienne sur $T\mathcal{F}$ qui l'identifie à $T^*\mathcal{F}$. Soit σ le symbole principal de D, c'est un isomorphisme de $\Pi_{S^*}(E)$ sur $\Pi_{S^*}(F)$ (où Π désigne la projection $T\mathcal{F} \to V$), et il définit donc comme dans [26] II § 3 un élément de $K(B,S)$ que le caractère de Chern transforme en un élément de $H^*(B,S,Q)$ (cf. [26], p. 15). Utilisant l'isomorphisme de Thom, on obtient (cf. [24] Théorème 9.1) une classe de cohomologie à coefficients rationnels $\mathrm{ch}(D) \in H^*(V,Q)$, $\mathrm{ch}\, D = (-1)^{p(p+1)/2} \, \psi^{-1}(\mathrm{ch}\, \sigma)$ (où $\psi : H^*(V,Q) \to H^*(B,S,Q)$ est l'isomorphisme de Thom).

Soit $\mathrm{Td}(V)$ la classe de Todd du fibré $TV \otimes \mathbb{C}$ complexifié du fibré tangent à V, on a $\mathrm{Td}(V) \in H^*(V,Q)$. Si $\mathcal{J}$ désigne l'idéal de définition du feuilletage $\mathcal{F}$, i.e. l'idéal des formes différentielles sur V dont la restriction à $\mathcal{F}$ est nulle, on a $\omega \in \mathcal{J} \Rightarrow d\omega \in \mathcal{J}$. Soit $J \in H^*(V,\mathbb{R})$ l'idéal des classes de formes fermées $\omega \in \mathcal{J}$.

Lemme 11.

a) Soit C le courant de Ruelle et Sullivan et soit $[C] \in H_p(V,\mathbb{R})$ le cycle associé, on a $\omega\,[C] = 0$, $\forall\,\omega \in J$.

b) Soit $\mathrm{Td}\,(T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C})$ la classe de Todd du fibré complexifié du fibré tangent à $\mathcal{F}$, on a

$$\mathrm{Td}\,(V) - \mathrm{Td}\,(T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \in J\,.$$

Preuve. a) Soit $\omega \in J$, comme C est fermé, pour évaluer $\omega[C]$ il suffit d'évaluer $\langle \omega_1, C\rangle$ où $\omega_1 \in \mathcal{J}$. Par hypothèse la restriction de ω_1 à $\mathcal{F}$ est nulle, d'où $\langle \omega_1, C\rangle = 0$ (Proposition 7.1.3).

b) Soit $\mathcal{T}$ le fibré transverse à $\mathcal{F}$, on a $T\mathcal{F} \oplus \mathcal{T} = TV$, d'où $\mathrm{Td}\,(T\mathcal{F}\otimes\mathbb{C})\,\mathrm{Td}\,(\mathcal{T}\otimes\mathbb{C}) = \mathrm{Td}\,(V)$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Td}\,(\mathcal{T}\otimes\mathbb{C}) \in 1 + J$. Or le fibré transverse est muni grâce à la différentielle de l'holonomie d'une connexion ∇ dont la restriction à $\mathcal{F}$ est plate. En munissant $\mathcal{T}\otimes\mathbb{C}$ de la connexion $\nabla_{\mathbb{C}}$ et en désignant par K la matrice de courbure correspondante, on a $\omega = \det\left(\frac{K}{1-e^{-K}}\right) \in \mathrm{Td}\,(\mathcal{T}\otimes\mathbb{C})$ et la restriction de ω à $\mathcal{F}$ est égale à 1 par construction. Q.E.D.

Théorème 12. On a $\mathrm{Ind}_\Lambda(D) = \mathrm{ch}\,D\,\mathrm{Td}\,V[C]$ où C désigne le courant de Ruelle et Sullivan associé à Λ.

(Remarquons que $\mathrm{ch}\,D$ et $\mathrm{Td}\,V$ n'interviennent dans cette égalité que modulo J, en particulier on peut remplacer $\mathrm{Td}\,V$ par $\mathrm{Td}\,(T\mathcal{F}\otimes\mathbb{C})$.)

Preuve. Vérifions d'abord à l'aide du Corollaire 8 la formule ci-dessus pour l'opérateur de signature à coefficients dans un fibré auxiliaire. On suppose $\mathcal{F}$ orienté de dimension paire $p = 2\ell$, soit ζ un fibré de base V, hermitien et muni d'une connexion compatible ∇_ζ. Notons ζ' (resp. $\nabla_{\zeta'}$) la restriction de ζ à $\mathcal{F}$ (resp. de ∇_ζ à $\mathcal{F}$). Soit g une structure euclidienne sur le fibré tangent à $\mathcal{F}$. La variété feuille $\mathcal{F}$ est munie par g d'une structure riemannienne g', soit alors $A_{\zeta'}$ l'opérateur de signature généralisée sur $\mathcal{F}$ à coefficients dans le fibré ζ' (cf. [3] p. 109). Soit A le G-opérateur différentiel elliptique correspondant, la fonction transverse $\nu_0(A^*A) - \nu_0(AA^*)$ est donnée par une forme différentielle $\omega(g',\zeta')$ de degré $p = 2\ell$ sur la variété feuille, qui d'après [3] p. 309-311 est égale à

$$\omega(g',\zeta') = \sum_{2k+4s=2\ell} \mathrm{ch}_k(\zeta')\,2^{\ell-2s}\,L_s(g')$$

où, si K' désigne la matrice de courbure de $\nabla_{\zeta'}$ sur $\mathcal{F}$ et R' celle de la connexion riemannienne de g' sur $T\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{ch}_k(\zeta') = (2\pi i)^{-k}\,\mathrm{Trace}\,\frac{K'^k}{k!}$$

$$L_1 = \frac{1}{3}\,p_1'\,, \quad L_2 = \frac{1}{45}\,(7p_2' - p_1'^2), \ldots \text{ (cf. [3])}$$

où
$$p'_j = (2\pi i)^{-2j}\,\mathrm{Trace}\,(\Lambda^{2j}\,R')\,.$$

Définissons des formes fermées $\mathrm{ch}_k(\zeta)$ et $L_s(g)$ sur V en remplaçant dans les formules ci-dessus, K' par la matrice de courbure K de ∇_ζ et R' par la matrice de courbure R d'une connexion ∇_g sur le fibré $T\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}$ compatible avec sa structure hermitienne. On a alors $\Lambda(\nu_0(A^*A)-\nu_0(AA^*)) = \langle\omega(g,\zeta),C\rangle$ où $\omega(g,\zeta) = \sum \mathrm{ch}_k(\zeta)\,2^{\ell-2s}\,L_s(g)$. En effet la restriction de $\omega(g,\zeta)$ à $\mathcal{F}$ diffère de $\omega(g',\zeta')$ par un bord, dû à la distinction entre la restriction de ∇_g à $\mathcal{F}$ et la connexion riemannienne. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \sum 2^{-2s}\,L_s(g) \in H^*(V,Q)$, on a : $\mathrm{Ind}_\Lambda(A_\zeta) = 2^\ell\,\mathrm{ch}\,\zeta\,\mathcal{L}(\mathcal{F})[C]$. Les calculs de [26] p. 46 et p. 225 montrent que

$$\mathrm{ch}\,(A_\zeta)\,\mathrm{Td}\,(T\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}) = 2^\ell\,\mathrm{ch}\,\zeta\,\mathcal{L}(\mathcal{F})$$

dans $H^*(V,Q)$. On a donc vérifié l'égalité du théorème pour les opérateurs de la forme A_ζ.

Or le raisonnement de [26] p. 224-225 et l'invariance de $\mathrm{Ind}_\Lambda(D)$ par homotopie du symbole principal montrent l'égalité en général, si p est pair. Si p est impair on remplace $(V,\mathcal{F})$ par $(V\times S^1,\mathcal{F}\times S^1)$ et on utilise le raisonnement de [26]. Q.E.D.

10 Remarques

1. L'extension de $C^*(V, \mathcal{F})$ associée aux opérateurs pseudodifférentiels

Supposons V compacte. Considérons l'algèbre $\mathcal{P}^0$ des G-opérateurs pseudo-différentiels scalaires d'ordre ≤ 0. Tout $P \in \mathcal{P}^0$ définit un élément de $\mathrm{End}_G(L^2(G^x, \nu^x))$ en prolongeant P^x à $L^2(G^x, \nu^x)$ pour tout x. Soit alors $\mathcal{E}$ la C^*-algèbre obtenue en complétant $\mathcal{P}^0$ pour la norme $\operatorname{Sup}_{x \in V} \|P^x\|$.

Par construction, la C^*-algèbre $C^*(V, \mathcal{F})$ se plonge isométriquement dans $\mathcal{E}$; comme $C_c^{\infty,0}(V, \mathcal{F})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{P}^0$, on voit que sa fermeture $C^*(V, \mathcal{F})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{E}$. Soit S l'espace compact des demi-droites de $T^*(\mathcal{F})$; l'homomorphisme σ de $\mathcal{P}^0$ dans $C(S)$ se prolonge en un homomorphisme, noté encore σ, de $\mathcal{E}$ sur $C(S)$. En effet, pour tout $(x, \zeta) \in T^*(\mathcal{F})$ et $\varphi \in C^{\infty,0}(V)$, $d_{\mathcal{F}}\, \varphi(x) = \zeta$, $P \in \mathcal{P}^0$, on a :

$$\sigma_P(x, \zeta)\, a(x) = \operatorname*{Lim}_{\tau \to \infty} e^{-i\tau\varphi} P(e^{i\tau\varphi}\, a)(x)\,,$$

ce qui montre que $\|\sigma_P\| \leq \|P\|$. La surjectivité de σ résulte facilement de la Proposition 1.6 de [1].

On a $\sigma(P) = 0$ pour tout $P \in C^*(V, \mathcal{F})$ car $C_c^{\infty,0}(G)$ est dense dans $C^*(V, \mathcal{F})$. Pour montrer que le noyau de σ est $C^*(V, \mathcal{F})$, il suffit de vérifier que, si $P \in \mathcal{P}^0$ et $\|\sigma(P)\| \leq \varepsilon$, le spectre de P dans $\mathcal{E}/C^*(V, \mathcal{F})$ est contenu dans $\{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| \leq \varepsilon\}$. Or pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| > \varepsilon$, l'opérateur $P - \lambda \in \mathcal{P}^0$ est elliptique et donc inversible modulo $C_c^{\infty,0}(G)$.

On a donc une *extension* de $C^*(V, \mathcal{F})$

$$0 \to C^*(V, \mathcal{F}) \to \mathcal{E} \to C(S) \to 0$$

qui est une suite exacte de C^*-algèbres séparables. La K-théorie algébrique nous donne donc un homomorphisme canonique ∂ de $K^1(S) = K_1(C(S))$ dans $K^0(V, \mathcal{F}) = K_0(C^*(V, \mathcal{F}))$.

Soit alors A un G-opérateur elliptique (scalaire pour simplifier), pseudodifférentiel d'ordre 0. Par construction $A \in \mathcal{E}$ est inversible modulo $C^*(V, \mathcal{F})$ et on peut définir l'*indice analytique* $\mathrm{Ind}\, A$ comme l'élément de $K_0(V, \mathcal{F})$ associé à $\sigma(A)$ par ∂.

Les calculs du numéro VIII portent sur la détermination de

$$\mathrm{Dim}_\Lambda \circ \mathrm{Ind}(A) = \mathrm{Ind}_\Lambda(A)\,,$$

toute mesure transverse localement finie *de module* 1 déterminant un homomorphisme Dim_Λ de $K^0(V, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ grâce à la Proposition VII.4. Cet homomorphisme existe car tout projecteur $e \in C^*(V, \mathcal{F})$ est dans le domaine de φ quand φ est une trace semi-finie puisqu'il est limite en norme d'éléments du domaine.

2. La classe de Lebesgue pour un feuilletage transversalement C^∞

Soit $\mathcal{T}$ le fibré transverse au feuilletage $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_x = T_x(V)/T_x(\mathcal{F})$; pour tout $\gamma \in G$, $\gamma : x \to y$, soit $J(\gamma) : \mathcal{T}_x \to \mathcal{T}_y$ la différentielle de l'holonomie. La représentation J de G dans $\mathcal{T}$ joue le rôle du fibré tangent au "quotient $V/\mathcal{F}$".

Appelons *densité transversale* toute section ρ du fibré $|\Lambda|\,\mathcal{T}$ des densités d'ordre 1 sur $\mathcal{T}$. Soit alors α une densité d'ordre 1 sur $\mathcal{F}$; la décomposition $0 \to T_x(\mathcal{F}) \to T_x(V) \to \mathcal{T}_x \to 0$ de $T_x(V)$ définit une densité $\alpha \otimes \rho$ d'ordre 1 sur V.

Proposition. Soit ρ une densité transversale continue strictement positive. L'égalité $\Lambda(s^*\alpha) = \int \rho\alpha$ détermine une unique mesure transverse Λ sur G de module δ où $\rho_y(J(\gamma)\, v) = \delta(\gamma)\, \rho_x(v)$ pour tout $v \in \Lambda^q\, \mathcal{T}_x$.

La preuve n'offre pas de difficulté si on utilise la Proposition VII.12. La classe de Λ ne dépend pas du choix de ρ, et pour qu'un sous-ensemble mesurable saturé (i.e. réunion de feuilles de $\mathcal{F}$) de V soit Λ-négligeable, il faut et il suffit qu'il soit Lebesgue-négligeable dans V. (Si ρ est C^∞ tangentiellement, on a $\mathrm{Log}(\delta(\gamma)) = \int_\gamma \omega$ où $\omega = D\rho/\rho$ est la dérivée logarithmique de ρ relative à la connexion naturelle de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{F}$; en particulier, si $\mathcal{F}$ est donné par q formes différentielles ω_i sur V, $d\omega_i = \sum \theta_i^j \wedge \omega_j$, si $\rho = |\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q|$, alors ω est la restriction de $\sum \theta_i^i$ à $\mathcal{F}$.)

En théorie classique de l'intégration, un cas particulier important est celui de la mesure de Lebesgue sur une variété C^∞. Dans ce cas, les mesures absolument continues correspondent exactement (lorsqu'on a choisi une orientation) aux formes positives à coefficients mesurables, de degré égal à la dimension. La situation est exactement analogue en intégration non commutative.

Soit en effet H une représentation de carré intégrable de G ; l'algèbre de von Neumann $\mathrm{End}_\Lambda(H)$ construite au numéro V ne dépendant que de la classe de Λ, on voit donc, en prenant la classe de Lebesgue, qu'elle est canoniquement associée à H.

Définition. L'*algèbre de von Neumann* du feuilletage est $\mathrm{End}_\Lambda(L^2(G))$ où $L^2(G)$ désigne la représentation régulière gauche de G dans $(L^2(G^x))_{x\in V}$, ce dernier étant l'espace hilbertien canonique des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ de carré sommable sur G^x.

Les résultats du numéro VI donnent alors une description de l'espace des poids de $\mathrm{End}_\Lambda(L^2(G))$ comme formes différentielles à coefficients opérateurs. Nous renvoyons à [10] pour une description de cette traduction des résultats de VI.

Références

[1] M.F. Atiyah et I.M. Singer, The index of elliptic operators, IV, *Ann. of Math.* **93** (1971), 119-138.

[2] M.F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Astérisque* **32-33** (1976), 43-72.

[3] M.F. Atiyah, R. Bott et V.K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, *Invent. Math.* **19** (1973), 279-330.

[4] N. Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques, fascicule de résultats, paragraphes 8 à 15, Hermann, Paris (1971).

[5] R. Bowen, Anosov foliations are hyperfinite, *Ann. of Math.* **106** (1977), 549-565.

[6] M. Breuer, Fredholm theories in von Neumann algebras I & II, *Math. Ann.* **178** (1968), 243-254 et **180** (1969), 313-325.

[7] L.A. Coburn, R.D. Moyer et I.M. Singer, C^*-algebras of almost periodic pseudodifferential operators, *Acta Math.* **130** (1973), 279-307.

[8] A. Connes et M. Takesaki, Flot des poids sur les facteurs de type III, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série A, **278** (1974), 945-948.

[9] A. Connes et M. Takesaki, The flow of weights on factors of type III, *Tôhoku Math. J.* **29** (1977), 473-575.

[10] A. Connes, The von Neumann algebra of a foliation. Proceeding of the Rome conference, June 1977, *Lecture Notes in Physics* **80**, Springer (1978), 145-151.

[11] A. Connes, On the spatial theory of von Neumann algebras, *Prépublication.*

[12] A. Connes, On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms, *Symposia Math.* **20**, Academic Press (1976), 435-478.

[13] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, 2ème édition, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[14] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2ème édition, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[15] M. Duflo et C.C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, *J. Functional Analysis* **21** (1976), 209-243.

[16] J. Feldman et C.C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I & II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), 289-324 et 325-359.

[17] J. Feldman, P. Hahn et C.C. Moore, Orbit structure and countable sections for continuous group actions, *Prépublication.*

[18] P.B. Gilkey, The index theorem and the heat equation, *Math. Lecture Series* n° 4, Publish or Perish, Boston (1974).

[19] U. HAAGERUP, Operator valued weights in von Neumann algebras I, *J. Funct. Analysis* **32** (1979), 175-206 ; II, *J. Funct. Analysis* **33** (1979), 339-336.

[20] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **16** (1962), 367-397.

[21] P. HAHN, *Haar measure and convolution algebras as ergodic groupoids*, Thèse, Université de Harvard (1975).

[22] G. MACKEY, Ergodic theory, group theory and differential geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **50** (1963), 1184-1191.

[23] G. MACKEY, Ergodic theory and virtual groups, *Math. Ann.* **166** (1966), 187-207.

[24] J.W. MILNOR et J.D. STASHEFF, Characteristic classes, *Ann. Math. Studies* **76**, Princeton (1974).

[25] C.C. MOORE, Square integrable primary representations, *Prépublication.*

[26] R.S. PALAIS, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, *Ann. Math. Studies* **57**, Princeton (1965).

[27] J. PHILLIPS, Positive integrable elements relative to a left Hilbert algebra, *J. Functional Analysis* **13** (1973), 390-409.

[28] J. PHILLIPS, A note on square-integrable representations, *J. Functional Analysis* **20** (1975), 83-92.

[29] J.F. PLANTE, Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* **102** (1975), 327-361.

[30] A. RAMSAY, Virtual groups and group actions, *Advances in Math.* **6** (1971), 253-322.

[31] A. RAMSAY, Non transitive quasi-orbits in Mackey's analysis of group extensions, *Acta Math.* **137** (1976), 17-48.

[32] M. REED et B. SIMON, *Functional Analysis*, tomes II et IV, Academic Press, New York (1975) et (197 ?).

[33] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland, Amsterdam (1975).

[34] M. RIEFFEL, Morita equivalence for C^* and W^* algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **5** (1974), 51-96.

[35] D. RUELLE, Integral representations of measures associated with foliations, *Prépublication* (1977).

[36] D. RUELLE et D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, *Topology* **14** (1975), 319-327.

[37] S. SAKAI, C^*-algebras and W^*-algebras, *Ergebnisse der Math.* **60**, Springer (1971).

[38] M. SAMUELIDES, Mesure de Haar et W^* couple d'un groupoïde mesuré, *Prépublication.*

[39] J.L. SAUVAGEOT, *Étude des algèbres de groupoïde et des produits croisés*, Thèse, Paris (1976).

[40] J.L. Sauvageot, Sur le type du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact d'automorphismes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série A, **278** (1974), 941-944.

[41] A.K. Seda, Haar measures for groupoids, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **76** (1976), n° 5, 25-36.

[42] I. Segal A non commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.* **57** (1953), 401-457.

[43] I.M. Singer, Future extensions of index theory and elliptic operators, *Prospects in Mathematics*, *Ann. Math. Studies* **70** (Princeton 1971), 171-185.

[44] I.M. Singer, Some remarks on operator theory and index theory, *Lecture Notes in Math.* **575** (Springer 1977), 128-138.

[45] D. Sullivan, Cycles and the dynamical study of foliated manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976), 225-255.

[46] C. Sutherland, Notes on orbit equivalence : Krieger's theorem, *Lecture Notes Series* n° 23 (Oslo 197 ?).

[47] M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, *Springer Lecture Notes in Math.* **128** (1970).

[48] H.E. Winkelnkemper, The graph of a foliation, *Prépublication.*