Analyse et Géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut (Académie des Sciences), professeur

Variétés Noncommutatives de type Sphérique

1. Introduction

Mon cours cette année est basé sur ma collaboration avec G. Landi et M. Dubois-Violette et a pour sujet les *variétés noncommutatives*, dont on décrit de nombreux exemples concrets. Le problème essentiel est celui de la classification des variétés *sphériques* noncommutatives et est apparu naturellement à propos de la dualité de Poincaré en K-homologie.

Le résultat principal est la classification complete des variétés *sphériques* noncommutatives de dimension 3. Nous trouvons une déformation à trois paramètres de la 3-sphère standard S^3 et une déformation correspondante de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^4$.
Pour les valeurs génériques du paramètre de déformation nous montrons que l'algèbre obtenue (de polynomes sur la déformation de $\mathbb{R}^4$) est isomorphe à l'algèbre introduite par Sklyanin à propos des équations de Yang-Baxter. Des valeurs dégénérées du parametre de déformation ne donnent pas des algèbres de Sklyanin et nous en extrayons une classe, les θ-deformations, que nous étudions en détails.

Nous montrons grâce aux θ-deformations que toute variété Riemannienne compacte spinorielle dont le groupe d'isométries est de rang $r \geq 2$ admet une déformation isospectrale en une famille à un paramètre de géométries noncommutatives, vérifiant tous les axiomes que j'avais introduit en 96.

2. Variété sphériques noncommutatives

Une géométrie noncommutative est décrite par un triplet spectral,

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D) \tag{0.1}$$

où $\mathcal{A}$ est une algèbre dotée d'une involution $*$, représentée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et où D est un opérateur autoadjoint à resolvante compacte tel

que,
$$[D,a] \text{ est borné } \forall\, a \in \mathcal{A}\,. \tag{0.2}$$
L'opérateur D joue en général le role de l'opérateur de Dirac en géométrie Riemannienne. Il specifie à la fois la métrique sur l'espace des états de $\mathcal{A}$ par
$$d(\varphi,\psi) = \mathrm{Sup}\,\{|\varphi(a)-\psi(a)|;\, \|[D,a]\| \le 1\} \tag{0.3}$$
et la classe fondamentale en K-homologie. Ce qui fait fonctionner ce point de vue spectral en géométrie noncommutative est la non-trivialité de l'accouplement entre la K-théorie de l'algèbre $\mathcal{A}$ et la classe de K-homologie de D, donné dans le cas pair par
$$[e] \in K_0(\mathcal{A}) \to \text{Index } D_e^+ \in \mathbb{Z}\,. \tag{0.4}$$
Ici $[e]$ est la classe de l'idempotent
$$e \in M_r(\mathcal{A})\,,\ e^2 = e\,,\ e = e^* \tag{0.5}$$
dans l'algèbre des matrices $r \times r$ sur $\mathcal{A}$, et
$$D_e^+ = e\, D^+ e\ , \tag{0.6}$$
où $D^+ = D\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ est la restriction de D à l'image $\mathcal{H}^+$ de $\frac{1+\gamma}{2}$ et γ est la $\mathbb{Z}/2$ graduation de $\mathcal{H}$ dans le cas pair. La clef est une formule de l'indice opératorielle qui calcule l'accouplement ci-dessus (0.4) par un cocycle cyclique *local* sur l'algèbre $\mathcal{A}$. Cette formule locale devient particulièrement simple dans le cas où toutes les composantes du caractère de Chern $\mathrm{Ch}(e)$ en homologie cyclique s'annulent $\mathrm{ch}_j(e) = 0$ pour $j < m$.
Sous cette hypothese la formule de l'indice se réduit à,
$$\text{Index}\, D_e^+ = (-1)^m \,⨍\, \gamma \left(e - \frac{1}{2}\right) [D,e]^{2m}\, D^{-2m} \tag{0.7}$$
où l'on suppose que la dimension (donnée par l'ordre de la résolvente de D) est égale à $n = 2m$, et où $⨍$ est la trace de Dixmier.
L'annulation de toutes les composantes du caractère de Chern $\mathrm{Ch}(e)$ en homologie cyclique,
$$\mathrm{ch}_j(e) = 0 \qquad j < m\,, \tag{0.8}$$
définit les variétés sphériques.

L'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions sur une variété sphérique noncommutative S de dimension n est engendrée par les éléments de matrice d'un cycle x de la K théorie de $\mathcal{A}$, de dimension $n = \dim\,(S)$.
Ainsi, pour n pair, $n = 2m$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée par les éléments de matrice e^i_j d'un idempotent auto-adjoint

$$e = [e^i_j] \in M_q(\mathcal{A}), \;\; e = e^2 = e^*, \tag{0.9}$$

et l'on suppose que toutes les composantes $\mathrm{ch}_k(e)$ du caractère de Chern de e en homologie cyclique satisfont,

$$\mathrm{ch}_k(e) = 0 \;\; \forall k = 0, 1, \dots, m-1 \tag{0.10}$$

alors que $\mathrm{ch}_m(e)$ définit un cycle de Hochschild non-nul qui joue le role de la forme volume sur S.

Pour n impair l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée par les éléments de matrice U^i_j d'un unitaire

$$U = [U^i_j] \in M_q(\mathcal{A}), \;\; UU^* = U^*U = 1 \tag{0.11}$$

et, avec $n = 2m+1$, la condition (0.10) devient

$$\mathrm{ch}_{k+\frac{1}{2}}(U) = 0 \;\; \forall k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{0.12}$$

Les composantes ch_k du caractère de Chern en homologie cyclique sont les éléments du produit tensoriel,

$$\mathcal{A} \otimes (\tilde{\mathcal{A}})^{\otimes 2k} \tag{0.13}$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$ est le quotient de $\mathcal{A}$ par le sous-espace $\mathbb{C}1$, donnés par

$$\mathrm{ch}_k(e) = \sum \left(e^{i_0}_{i_1} - \frac{1}{2}\delta^{i_0}_{i_1} \right) \otimes e^{i_1}_{i_2} \otimes e^{i_2}_{i_3} \otimes \cdots \otimes e^{i_{2k}}_{i_0} \tag{0.14}$$

et

$$\mathrm{ch}_{k+\frac{1}{2}}(U) = \sum U^{i_0}_{i_1} \otimes U^{*i_1}_{i_2} \otimes U^{i_2}_{i_3} \otimes \cdots \otimes U^{*i_{2k+1}}_{i_0} - \sum U^{*i_0}_{i_1} \otimes \cdots \otimes U^{i_{2k+1}}_{i_0} \tag{0.15}$$

à une constante de normalisation prés.

Pour $m = 1$ (et $r = 2$ dans (0.5)) les relations $e^2 = e$, $e = e^*$ et $\mathrm{ch}_0(e) = 0$ imposent la commutativité de l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les composantes,

$$e_{ij}\,,\ e = [e_{ij}] \in M_2(\mathcal{A})\,. \tag{0.16}$$

On montre que $\mathcal{A} = C^\infty(S^2)$.
Pour $m = 2$ (et $r = 4$ in (0.5)) nous avons d'abord construit des solutions commutatives avec $\mathcal{A} = C^\infty(S^4)$ où S^4 apparait comme l'espace projectif sur les quaternions. On montre de plus que pour toute métrique Riemannienne $g_{\mu\nu}$ sur S^4 dont la forme volume $\sqrt{g}\,d^4x$ est celle de la métrique ronde, l'opérateur de Dirac correspondant à $g_{\mu\nu}$ donne une solution de l'équation opératorielle quartique,

$$\left\langle \left(e - \frac{1}{2}\right)[D,e]^4 \right\rangle = \gamma_5 \tag{0.17}$$

où $\langle\ \rangle$ est la projection sur le commutant des matrices 4×4.
Sur les sphères classiques S^{2m}, le générateur de Bott, $E \in C^\infty(S^{2m}, M_r(\mathbb{C}))$ construit à partir des algèbres de Clifford, donne une solution des équations (0.10), (0.12).

Theoreme 1.

a) *$E \in C^\infty(S^{2m}, M_r(\mathbb{C}))$ satisfait $E = E^2 = E^*$ et $\mathrm{ch}_j(E) = 0\ \forall\, j < m$.*

b) *Le cycle de Hochschild $\omega = \mathrm{ch}_m(E)$ est la forme volume de la sphère ronde S^{2m}.*

c) *Soit g une métrique Riemannienne sur S^{2m} de forme volume égale à ω, alors l'opérateur de Dirac correspondant D vérifie*

$$\left\langle \left(e - \frac{1}{2}\right)[D,e]^{2m} \right\rangle = \gamma$$

où $e = E$ comme ci-dessus et $\langle\ \rangle$ est la projection sur le commutant de $M_r(\mathbb{C})$.

Mais l'analyse effectuée dans le cas $m = 2$ (et $r = 4$) n'excluait pas la possibilité d'une solution noncommutative. Le premier résultat surprenant est que de telles solutions éxistent et donnent de nouveaux exemples tres naturels de 4-sphères S^4_θ noncommutatives.

Nous analysons alors les métriques (i.e. les opérateurs D) sur ces nouvelles solutions de (0.8) et nous montrons comment construire l'opérateur de Dirac sur S_θ^4 de telle sorte que l'équation (0.17) continue à avoir lieu. En combinant cette equation (0.17) avec la formule de l'indice donne la quantification suivante du volume,

$$\int\!\!\!\!\!- \, ds^4 \in \mathbb{N} \qquad ds = D^{-1} \tag{0.18}$$

et fixe (dans une classe de K-homologie donnée pour D) le terme cosmologique de l'action spectrale,

$$\mathrm{Trace}\left(f\left(\frac{D}{\Lambda}\right)\right) = \frac{\Lambda^4}{2} \int\!\!\!\!\!- \, ds^4 + \cdots \tag{0.19}$$

Comme le terme suivant est l'action de Hilbert-Einstein, cela permet de comparer entre elles les solutions (commutatives ou non) de (0.17) en utilisant cette fonctionnelle d'action.

Le deuxième résultat principal est la classification complete des variétés *sphériques* noncommutatives de dimension 3. Nous trouvons une déformation à 3 paramètres de la 3-sphère standard S^3 et une déformation correspondante de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^4$. Pour les valeurs génériques du paramètre de déformation nous montrons que l'algèbre obtenue (de polynomes sur la déformation de $\mathbb{R}^4$) est isomorphe à l'algèbre introduite par Sklyanin à propos des équations de Yang-Baxter. Des valeurs dégénérées du parametre de déformation ne donnent pas des algèbres de Sklyanin et nous en extrayons une classe, les θ-deformations, que nous étudions en détails.

En conclusion les exemples ci-dessus apparaissent comme un point de contact intéressant entre divers points de vue sur la géométrie noncommutative. La motivation de départ est l'équation opératorielle de degré n vérifiée par l'opérateur de Dirac sur une variété spinorielle de dimension n. La manière la plus simple de quantifier le cycle de Hochschild correspondant $c = \mathrm{ch}(e)$ conduit à la définition des variétés sphériques. Nous montrons que dans le cas non-trivial le plus simple ($n = 3$, $q = 2$) la réponse est intimement reliée à l'algèbre de Sklyanin qui joue un rôle essentiel en géométrie algébrique noncommutative.

3. Déformations Isospectrales

Nous décrivons une construction tres générale de déformations isospectrales de géométries noncommutatives. Ceci montre en particulier que les axiomes

que j'avais introduits en 96 sont réalisés dans de tres nombreux exemples, y compris par des espaces "homogènes". Il suffit en effet de se donner une variété Riemannienne compacte M (spinorielle) dont le groupe d'isométries est de rang ≥ 2 pour pouvoir la déformer en géométries noncommutatives isospectrales. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ le triplet spectral canoniquement associé à M. Ainsi $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ est l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur M, $\mathcal{H} = L^2(M,S)$ est l'espace de Hilbert des spineurs et D l'opérateur de Dirac. On note J l'opérateur de conjuguaison de charge qui est antilinéaire et isométrique sur $\mathcal{H}$.
On suppose que le groupe $\mathrm{Isom}(M)$ des isométries de M est de rang $r \geq 2$, d'où une inclusion

$$\mathbb{T}^2 \subset \mathrm{Isom}(M)\,, \tag{0.20}$$

où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est le tore usuel. Soient $U(s), s \in \mathbb{T}^2$, les unitaires correspondant dans $\mathcal{H} = L^2(M,S)$ de sorte que,

$$U(s)\,D = D\,U(s)\,,\;\; U(s)\,J = J\,U(s)\,, \tag{0.21}$$

et

$$U(s)\,a\,U(s)^{-1} = \alpha_s(a)\,,\;\; \forall\, a \in \mathcal{A}\,, \tag{0.22}$$

où $\alpha_s \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ est l'action par isométries sur l'algèbre des fonctions sur M. Soit $p = (p_1, p_2)$ le générateur du groupe à deux paramètres $U(s)$,

$$U(s) = \exp(i(s_1 p_1 + s_2 p_2))\,. \tag{0.23}$$

On définit une bigraduation de l'algèbre des opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ par,

$$\alpha_s(T) = \exp(i(s_1 n_1 + s_2 n_2))\,T\,,\;\; \forall\, s \in \mathbb{T}^2\,, \tag{0.24}$$

pour T de bidegré (n_1, n_2) et $\alpha_s(T) = U(s)\,T\,U(s)^{-1}$.
Tout opérateur T de classe C^∞ relativement à α_s est la somme d'une série d'éléments homogènes,

$$T = \sum_{n_1,n_2} \widehat{T}_{n_1,n_2}\,, \tag{0.25}$$

où $\widehat{T}_{n_1,n_2}$ est de bidegré (n_1, n_2) et la suite de normes $||\widehat{T}_{n_1,n_2}||$ est à décroissance rapide.

Soit $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$. Pour tout opérateur T dans $\mathcal{H}$ de classe C^∞ on définit $l(T)$ par

$$l(T) = \sum_{n_1,n_2} \widehat{T}_{n_1,n_2}\,\lambda^{n_2 p_1}\,, \tag{0.26}$$

et $r(T)$ par

$$r(T) = \sum_{n_1,n_2} \widehat{T}_{n_1,n_2} \, \lambda^{n_1 p_2} \, , \tag{0.27}$$

Comme $|\lambda| = 1$ les séries convergent en norme.
On a $[l(x), r(y)] = 0$ si x et y sont homogènes et $[x, y] = 0$. De plus, en posant, avec x et y homogènes,

$$x * y = \lambda^{n'_1 n_2} \, xy \, ; \tag{0.28}$$

on a $l(x)l(y) = l(x * y)$.
Le produit $*$ defini en (0.28) se prolonge par linéarité en un produit associatif à l'espace des opérateurs de classe C^∞.

On définit une nouvelle isométrie antilinéaire par,

$$\widetilde{J} = J \, \lambda^{-p_1 p_2} \, . \tag{0.29}$$

On a $\widetilde{J} = \lambda^{p_1 p_2} \, J$ et

$$\widetilde{J}^2 = J^2 \, . \tag{0.30}$$

On obtient alors un triplet spectral déformé où ni $\mathcal{H}$ ni l'opérateur D ne sont modifiés, mais où l'algèbre $\mathcal{A}$ et l'involution J sont remplaçées par $l(\mathcal{A})$ et $\widetilde{J}$ respectivement. On vérifie alors que le triplet spectral déformé satisfait tous les axiomes de la Géométrie Noncommutative.
Il en résulte ainsi,

Theoreme 2. *Toute variété Riemannienne compacte spinorielle M dont le groupe d'isométries est de rang $r \geq 2$ admet une déformation isospectrale en une famille à un paramètre de géométries noncommutatives M_θ.*

On obtient l'opérateur de Dirac pour la connection de Levi-Civita en minimisant la fonctionnelle $⨍ D^{2-n}$ (où n est la dimension de M).

Conférences

Âout 2000, 1 conférence au congrés de l'AMS pour l'an 2000, à Los-Angeles.

Septembre 2000, 4 cours à l'école de Martina Franca.

Septembre 2000, 1 cours aux conscrits à l'école Normale Supérieure.

Septembre 2000, 1 conférence au congrés NOG de Bonn.

Septembre 2000, 1 cours à la rencontre entre physiciens et mathématiciens de Turin.

Octobre 2000, 1 cours à Potsdam.

Décembre 2000, 2 séminaires de physique à l'IHP.

Mai 2001, 2 cours de 1 heure au MSRI (Berkeley).

Mai 2001, 2 conférences à Los-Angeles (Caltech et UCLA).

Mai 2001, 1 conférence à Santa-Barbara (ITP).

Juin 2001, 2 conférences à Oxford pour les soixante ans de D. Quillen.

Juin 2001, 1 conférence à l'école des Houches (50-ême anniversaire).

Publications

A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II, the β function, diffeomorphisms and the renormalization group ; hep-th/0003188 Comm.Math.Phys. (2001).

A. Connes, G. Landi, Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations Com. Math. Phys.(2001). Math QA/0011194

A. Connes, H. Moscovici, Differentiable cyclic cohomology and Hopf algebraic structures in transverse geometry. Math DG/0102167

A. Connes, Noncommutative Geometry Year 2000, GAFA special volume 2000.Math QA/0011193