Analyse et Géométrie
M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Mécanique Statistique Quantique des $\mathbb{Q}$-réseaux

1. $\mathbb{Q}$-réseaux

Mon cours cette année est basé sur ma collaboration avec M. Marcolli et a pour sujet la mécanique statistique quantique des $\mathbb{Q}$-réseaux. La notion de $\mathbb{Q}$-réseau permet d'unifier les résultats de mon cours 98-99 sur la *réalisation spectrale des zéros des fonctions L* avec ceux de mon cours 2002-2003 sur les *formes modulaires et crochets de Rankin-Cohen*.
Cela permet aussi d'obtenir l'analogue pour GL(2) du système de mécanique statistique quantique, construit en collaboration avec J.B. Bost, intimement relié à la théorie du corps de classe pour $\mathbb{Q}$, grâce au phénomène de brisure de symétrie et à la présence d'une sous-algèbre d'observables "rationnelles" qui permet de déceler les propriétés arithmétiques des états d'équilibre (états KMS).
L'espace noncommutatif qui donne cet analogue pour GL(2) et qui est le thème du cours est le quotient de l'espace des $\mathbb{Q}$-réseaux de $\mathbb{C}$ par la relation de commensurabilité.

Definition 1 *Un $\mathbb{Q}$-réseau dans $\mathbb{R}^n$ est un couple (Λ, ϕ), où Λ est un réseau dans $\mathbb{R}^n$, et $\phi : \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Q}\Lambda/\Lambda$ un homomorphisme de groupes abéliens.*

Deux réseaux Λ_j dans $\mathbb{R}^n$ sont commensurables ssi leur intersection $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ est d'indice fini dans chacun d'eux. Leur somme $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ est alors un réseau et, étant donnés deux homomorphismes de groupes abéliens $\phi_j : \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Q}\,\Lambda_j/\Lambda_j$, la différence $\phi_1 - \phi_2$ est bien définie modulo $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$.

Proposition 1 *La relation suivante est une relation d'équivalence entre $\mathbb{Q}$-réseaux : $(\Lambda_1, \phi_1) \sim (\Lambda_2, \phi_2)$ ssi les réseaux Λ_j sont commensurables et $\phi_1 - \phi_2 = 0$ modulo $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$.*

Nous parlerons alors de *commensurabilité* entre $\mathbb{Q}$-réseaux.

L'espace $\mathcal{L}_n$ des classes de commensurabilité de $\mathbb{Q}$-réseaux dans $\mathbb{R}^n$ est un espace noncommutatif. Les deux espaces qui sont analysés dans le cours sont

$$X_1 = \mathcal{L}_1/\mathbb{R}_+^*\,, \qquad X_2 = \mathcal{L}_2/\mathbb{C}^*\,.$$

2. Propriétés arithmétiques des états KMS.

Rappelons brièvement le formalisme de la mécanique statistique quantique. Les observables d'un système forment une C^*-algèbre A, et l'Hamiltonien est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(A)$. L'état statistique du système est donné par une forme linéaire φ sur A telle que

$$\varphi(1) = 1\,, \quad \varphi(a^* a) \geqq 0 \qquad \forall\, a \in A\,.$$

Quand la C^*-algèbre A n'a pas d'élément unité la condition $\varphi(1) = 1$ est remplaçée par $||\varphi|| = 1$ où

$$||\varphi|| := \sup_{x \in A, ||x|| \leq 1} |\varphi(x)|\,.$$

Un état d'équilibre à température inverse $\beta = \frac{1}{kT}$ est caractérisé par la condition KMS_β suivante,

$$\forall\, a, b \in A\,,\ \exists\, F \ \text{ holomorphe bornée dans la bande } \{z \,|\, \mathrm{Im}\, z \in [0, \beta]\}$$

$$F(t) = \varphi(a\, \sigma_t(b)) \qquad F(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(b) a) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Les $\mathbb{Q}$-réseaux de dimension 1 donnent une interprétation géométrique du système de mécanique statistique quantique (A, σ_t) construit en collaboration avec J.B. Bost. L'algèbre A des observables de ce système est engendrée par les éléments μ_n, $n \in \mathbb{N}^\times$ et $e(r)$, pour $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, vérifiant les relations

- $\mu_n^* \mu_n = 1\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times$,
- $\mu_k \mu_n = \mu_{kn}\,, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}^\times$,
- $e(0) = 1$, $e(r)^* = e(-r)$, et $e(r) e(s) = e(r+s)\ \ , \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
-
$$\mu_n\, e(r)\, \mu_n^* = \frac{1}{n} \sum_{ns = r} e(s)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times,\ r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le groupe à un paramètre σ_t fixe les éléments $e(r)$ et agit sur les μ_n par

$$\sigma_t(\mu_n) = n^{it}\, \mu_n.$$

Soit $\mathcal{A}_\mathbb{Q} \subset A$ la sous-algèbre sur $\mathbb{Q}$ engendrée par μ_n, μ_n^*, $n \in \mathbb{N}^\times$ et $e(r), r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Elle contient l'anneau $R_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$. Le groupe naturel de symétries

du système (A, σ_t) est le groupe G des éléments inversibles de l'anneau $\hat{\mathbb{Z}}$ complétion profinie de $\mathbb{Z}$. Ce groupe agit par automorphismes du sytème (A, σ_t). L'on note $\mathbb{Q}^{ab}$ l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$.
L'essentiel du cours consiste à obtenir l'analogue pour GL(2) du résultat suivant :

Théorème 1 *1. Pour $0 < \beta \leqq 1$ il existe un unique état KMS_β noté φ_β du système (A, σ_t). Sa restriction à $R_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset A$ est donnée par*

$$\varphi_\beta\,(e(a/b)) = b^{-\beta} \prod_{p\,\text{premier},\,p|b} \left(\frac{1-p^{\beta-1}}{1-p^{-1}}\right).$$

2. Pour $\beta > 1$ les états KMS_β extremaux sont paramétrés par les plongements $\rho : \mathbb{Q}^{ab} \to \mathbb{C}$ et

$$\varphi_{\beta,\rho}\,(e(a/b)) = Z(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \rho\left(\zeta_{a/b}^{n}\right)\,,$$

où la fonction de partition $Z(\beta) = \zeta(\beta)$ est la fonction zeta de Riemann.

3. Pour $\beta = \infty$, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$ agit par composition sur la restriction de l'état à $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}} \subset A$ et l'isomorphisme du corps de classe $\theta : G \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$ vérifie

$$\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \theta^{-1}(\alpha)\,, \qquad \alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})\,.$$

La première étape dans l'obtention de l'analogue pour GL(2) consiste à réinterpréter le système ci-dessus en termes de l'espace $X_1 = \mathcal{L}_1/\mathbb{R}_+^*$ des classes de $\mathbb{Q}$-réseaux de dimension un modulo la commensurabilté et l'action de $\mathbb{R}_+^*$ par multiplication. Tout $\mathbb{Q}$-réseau dans $\mathbb{R}$ est uniquement de la forme

$$(\Lambda, \phi) = (\lambda\,\mathbb{Z}, \lambda\,\rho)\,, \quad \lambda > 0,$$

avec $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}$. Soit G_1 le groupoide produit semi-direct de l'espace compact $\hat{\mathbb{Z}}$ par l'action de $\mathbb{Q}_+^*$. Un élément de G_1 est un couple (r, ρ) où $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\rho \in \hat{\mathbb{Z}}$ et $r\,\rho \in \hat{\mathbb{Z}}$. La composition dans G_1 est donnée par

$$(r_1, \rho_1) \circ (r_2, \rho_2) = (r_1\,r_2, \rho_2)\,, \quad \text{si } r_2\,\rho_2 = \rho_1\,,$$

et la convolution des fonctions par

$$f_1 * f_2(r,\rho) := \sum f_1(rs^{-1}, s\,\rho)\, f_2(s,\rho)\,,$$

avec l'involution

$$f^*(r,\rho) := \overline{f(r^{-1}, r\,\rho)}\,.$$

On montre que le système (A, σ_t) ci-dessus est fonctoriellement associé au groupoide G_1 et à l'homomorphisme $(r,\rho) \mapsto r \in \mathbb{R}_+^*$. La réinterprétation cherchée découle alors de la proposition suivante,

Proposition 2 *L'application*

$$\gamma(r,\rho) = ((r^{-1}\,\mathbb{Z},\, \rho)\,, (\mathbb{Z}, \rho))\,, \quad \forall (r,\rho) \in G_1\,,$$

definit un isomorphisme de groupoides localement compacts étales entre G_1 et le quotient $\mathcal{R}\,/\,\mathbb{R}_+^*$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de commensurabilité sur l'espace des $\mathbb{Q}$-réseaux de $\mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{R}_+^*$.

Le pas suivant consiste à identifier en terme de fonctions de réseaux la sous-algèbre $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}} \subset A$ des observables "rationnelles". Les générateurs μ_n sont immédiats mais obtenir l'algèbre $R_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ est plus délicat. Nous dirons qu'une fonction f sur les $\mathbb{Q}$-réseaux est de poids k si

$$f(\lambda\,\Lambda, \lambda\,\phi) = \lambda^{-k}\, f(\Lambda, \phi)\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

Soit alors $c(\Lambda)$ le multiple du covolume $|\Lambda|$ normalisé par

$$2\,\pi\, i\, c(\mathbb{Z}) = 1\,. \tag{0.0.1}$$

La fonction c est homogène de poids -1. Pour $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on définit une fonction e_a de poids 0 par

$$e_a(\Lambda, \phi) = c(\Lambda) \sum_{y \in \Lambda + \phi(a)} y^{-1}\,,$$

où l'on utilise la sommation d'Eisenstein *i.e.* $\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N}$ quand $\phi(a) \neq 0$ et où $e_a(\Lambda, \phi) = 0$ quand $\phi(a) = 0$.

Le résultat principal de la réinterprétation est le suivant,

Théorème 2 – *Les $e_a\,, a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendrent $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$.*

– *$\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ est la sous-algèbre de $A = C^*(G_1)$ engendrée par les e_a, $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et les μ_n, μ_n^*.*

3. Mécanique statistique quantique des $\mathbb{Q}$-réseaux dans $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{R}_2$ la relation de commensurabilité entre $\mathbb{Q}$-réseaux de $\mathbb{C}$. On choisit la base $\{e_1 = 1, e_2 = -i\}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ ce qui définit l'action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$. Soit

$$\Lambda_0 := \mathbb{Z}\, e_1 + \mathbb{Z}\, e_2 = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$$

Tout $\rho \in M_2(\hat{\mathbb{Z}})$ définit un homomorphisme

$$\rho : \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}.\Lambda_0/\Lambda_0\,, \quad \rho(a) = \rho_1(a)e_1 + \rho_2(a)e_2\,.$$

Par construction $\mathcal{R}_2$ est un groupoide localement compact que l'on paramètre comme le quotient S_2 de l'espace des triplets $(g, \rho, \alpha) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \times M_2(\hat{\mathbb{Z}}) \times \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, $g\,\rho \in M_2(\hat{\mathbb{Z}})$ par l'action du groupe $\Gamma \times \Gamma$, $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ en posant

$$r(g, \rho, \alpha) = ((\alpha^{-1}\, g^{-1}\Lambda_0,\, \alpha^{-1}\, \rho)\,, (\alpha^{-1}\, \Lambda_0,\, \alpha^{-1}\, \rho)) \in \mathcal{R}_2\,, \quad \forall (g, \rho, \alpha) \in S_2$$

L'action de $\Gamma \times \Gamma$ est libre et propre et n'altère pas r, elle est donnée par

$$(\gamma_1, \gamma_2).(g, \rho, \alpha) := (\gamma_1\, g \gamma_2^{-1},\, \gamma_2\rho, \gamma_2\alpha).$$

Passons au quotient de $\mathcal{R}_2$ par l'action à droite de $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ où

$$\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}^* \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})\,.$$

On identifie le quotient $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})/\mathbb{C}^*$ avec le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \mapsto \tau = \frac{ai + b}{ci + d} \in \mathbb{H}.$$

Etant donnés un couple (Λ_j, ϕ_j) de $\mathbb{Q}$-réseaux commensurables et un nombre complexe non-nul $\lambda \in \mathbb{C}^*$ le couple $(\lambda\Lambda_j, \lambda\phi_j)$ est commensurable, de plus

$$r(g, \rho, \alpha\, \lambda^{-1}) = \lambda\, r(g, \rho, \alpha)\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\,.$$

L'action de $\mathbb{C}^*$ sur les $\mathbb{Q}$-réseaux de $\mathbb{C}$ n'est pas libre, car le réseau Λ_0 par exemple est invariant par la multiplication par i. Ainsi le quotient $Z = \mathcal{R}_2/\mathbb{C}^*$

n'est pas un groupoide. On peut néanmoins définir son algèbre de convolution par restriction du produit de convolution de $\mathcal{R}_2$ aux fonctions homogènes de *poids* 0, où le poids k signifie

$$f(g,\rho,\alpha\,\lambda) = \lambda^k\, f(g,\rho,\alpha)\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\,.$$

Par construction Z est un espace localement compact

$$Z \subset \Gamma\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \times_\Gamma Y$$

où

$$Y = M_2(\hat{\mathbb{Z}}) \times \mathbb{H}$$

est muni de l'action (partielle) naturelle de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$

$$\gamma \cdot (\rho,\tau) = \left(\gamma\,\rho,\ \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\,.$$

Soit $\mathcal{A} = C_c(Z)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur Z. Toute $f \in \mathcal{A}$ est une fonction sur $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \times Y$ telle que

$$f(\gamma\, g, y) = f(g,y) \quad f(g\,\gamma, y) = f(g, \gamma\, y)\,, \quad \forall \gamma \in \Gamma\,,\ g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})\,,\ y \in Y\,.$$

On définit le produit de convolution par

$$(f_1 * f_2)(g,y) \,:=\, \sum_{h \in \Gamma\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}),\, hy \in Y} f_1(gh^{-1}, hy)\; f_2(h,y)$$

et l'adjoint par

$$f^*(g,y) \,:=\, \overline{f(g^{-1}, g\,y)}.$$

Pour tout $y \in Y$ soit

$$G_y = \{g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \,|\, gy \in Y\}\,.$$

L'on définit une représentation π_y de $\mathcal{A}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_y = l^2(\Gamma\backslash G_y)$ par

$$(\pi_y(f)\,\xi)(g) := \sum_{h \in \Gamma\backslash G_y} f(gh^{-1}, hy)\,\xi(h)\,, \quad \forall g \in G_y\,,$$

pour $f \in \mathcal{A}$ et $\xi \in \mathcal{H}_y$. Soit p l'application quotient de Y vers $X = \Gamma\backslash Y$.

Proposition 3 *1) L'espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni du produit $*$ et de l'involution $f \mapsto f^*$ est une algèbre involutive.*
2) Pour tout $y \in Y$, π_y est une représentation unitaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}_y$ dont la classe ne dépend que de $x = p(y)$.
3) La complétion de $\mathcal{A}$ pour la norme

$$||f|| := \mathrm{Sup}_{y \in Y}\, ||\pi_y(f)||$$

est une C^*-algèbre A.

L'on munit A du groupe à un paramètre d'automorphismes donné par

$$\sigma_t(f)(g,y) = (\mathrm{Det}\, g)^{it}\, f(g,y)\,.$$

Le résultat principal du cours est la compréhension complète des états KMS du système (A, σ_t). Nous dirons qu'un $\mathbb{Q}$-réseau $l = (\Lambda, \phi)$ est inversible si ϕ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Théorème 3 *1) Pour tout $\mathbb{Q}$-réseau inversible $l = (\Lambda, \phi)$ la représentation π_l est d'énergie positive.*
2) Pour $\beta > 2$ et tout $\mathbb{Q}$-réseau inversible $l = (\Lambda, \phi)$ l'égalité

$$\varphi_{\beta,l}(f) = Z^{-1} \sum_{\Gamma \backslash M_2(\mathbb{Z})^+} f(1, m\,\rho, m(\tau))\,\mathrm{Det}(m)^{-\beta}\,,$$

definit un état KMS_β extrémal $\varphi_{\beta,l}$ sur (A, σ_t), où la fonction de partition est $Z = \zeta(\beta)\,\zeta(\beta - 1)$.
3) Pour $\beta > 2$ l'application $l \mapsto \varphi_{\beta,l}$ est une bijection de l'espace des $\mathbb{Q}$-réseaux inversibles (modulo l'action de $\mathbb{C}^*$) avec l'espace $\mathcal{E}_\beta$ des états KMS_β extrémaux sur (A, σ_t).

Le pas principal de la démonstration est la construction d'une sous-algèbre engendrée par des projecteurs $\pi_p(k,l)$ (où p est un nombre premier et (k,l) un couple d'entiers $k < l$) vérifiant le lemme suivant,

Lemme 1 – *Soit φ un état KMS_β sur (A, σ_t). Alors*

$$\varphi(\pi_p(k,l)) = \, p^{-(k+l)\beta}\, p^{l-k}\,(1 + p^{-1})\,(1 - p^{-\beta})\,(1 - p^{1-\beta})$$

et pour $k = l$,

$$\varphi(\pi_p(l,l)) = \, p^{-2l\beta}\,(1 - p^{-\beta})\,(1 - p^{1-\beta})\,.$$

– *Soient p_j des nombres premiers distincts,*

$$\varphi(\prod \pi_{p_j}(k_j,l_j)) = \prod \varphi(\pi_{p_j}(k_j,l_j)).$$

Ce lemme montre en particulier que pour $0 < \beta < 1$ il n'existe aucun état KMS_β sur (A, σ_t).
L'action évidente du groupe $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ par composition à droite se combine avec une action naturelle du semigroupe $M_2(\mathbb{Z})^+$ par endomorphismes et donne une action du groupe $S = \mathbb{Q}^* \backslash \mathrm{GL}_2(\mathrm{A}_f)$ comme symétries du système (A, σ_t) où A_f est l'anneau des adèles finies sur $\mathbb{Q}$.

4. La sous-algèbre $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ et le corps modulaire

La dernière étape consiste à construire une sous-algèbre *arithmétique* $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ de l'algèbre des multiplicateurs non-bornés de A. Les états KMS_∞ du système $\varphi \in \mathcal{E}_\infty$ se prolongent à $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ et l'image $\varphi(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}})$ engendre, génériquement, une spécialisation $F_\varphi \subset \mathbb{C}$ du corps modulaire F. L'état φ conjugue alors le groupe de symétries S du système (A, σ_t) avec le groupe de Galois de F_φ *i.e.* nous montrons qu'il existe un isomorphisme θ de S avec $\mathrm{Gal}(F_\varphi/\mathbb{Q})$ tel que

$$\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \theta^{-1}(\alpha)\,, \quad \forall \alpha \in \mathrm{Gal}(F_\varphi/\mathbb{Q})\,.$$

Les éléments de $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ sont des fonctions continues $f \in C(Z)$ sur

$$Z \subset \Gamma \backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \times_\Gamma Y$$

à support fini dans la variable $g \in \Gamma \backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$. Le multiplicateur non-borné de la C^*-algèbre A est donné comme ci-dessus par la convolution

$$(f_1 * f_2)(g,y) := \sum_{h \in \Gamma \backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}), hy \in Y} f_1(gh^{-1}, hy)\, f_2(h,y).$$

On a $Y = M_2(\hat{\mathbb{Z}}) \times \mathbb{H}$ et l'on pose

$$f_{(g,\rho)} = f(g,\rho,z)$$

de sorte que $f_{(g,\rho)} \in C(\mathbb{H})$. Soit $p_N : M_2(\hat{\mathbb{Z}}) \to M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ la projection canonique. Nous dirons que f est de niveau N si $f_{(g,\rho)}$ ne dépend que de $(g, p_N(\rho)) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. La fonction f est alors entièrement déterminée par les

$$f(g,m) \in C(\mathbb{H})$$

avec $m \in M_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.
L'invariance

$$f(g\,\gamma, y) = f(g, \gamma\, y)\,, \quad \forall \gamma \in \Gamma\,,\; g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})\,,\; y \in Y$$

montre que

$$f(g,m)|\gamma = \; f(g,m)\,, \quad \forall \gamma \in \Gamma(N) \cap g^{-1}\Gamma g\,,$$

de sorte que f est invariante par un sous-groupe de congruence.

Soit F le corps des fonctions modulaires rationnelles sur $\mathbb{Q}^{ab}$, *i.e.* la réunion des corps F_N de fonctions modulaires de niveau N rationnelles sur $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$ *i.e.* dont le développement en puissances de $q^{\frac{1}{N}} = e^{2\pi i \tau/N}$ a tous ses coefficients a_n dans $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$. Les résultats classiques montrent que l'action du groupe de Galois $\hat{\mathbb{Z}}^*$ de $\mathbb{Q}^{ab}$ sur les coefficients a_n définit un homomorphisme $\mathrm{cy} : \hat{\mathbb{Z}}^* \mapsto \mathrm{Aut}(F)$.

Par définition les éléments de $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ sont de niveau fini et vérifient

$$f(g,m) \in F \quad \forall (g,m)\,,$$

et la condition cyclotomique suivante,

$$f_{g,\alpha(u)\,m} = \mathrm{cy}(u) f_{g,m}$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ diagonal et $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ avec

$$\alpha(u) = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 4 *$\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des multiplicateurs non-bornés de A, globalement invariante par le groupe de symétries S.*

L'analogue pour GL(2) de la troisième partie du théorème 1 est alors

Théorème 4 *Soit $l = (\rho, \tau)$ un $\mathbb{Q}$-réseau inversible tel que $j(\tau) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ et $\varphi_l \in \mathcal{E}_\infty$ l'état KMS$_\infty$ correspondant. L'image $\varphi_l(\mathcal{A}_\mathbb{Q}) \subset \mathbb{C}$ engendre la spécialisation $F_\tau \subset \mathbb{C}$ du corps modulaire F.*
Il existe un unique isomorphisme θ du groupe S de symétries du système (A, σ_t) avec le groupe de Galois de F_τ tel que sur $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$

$$\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \theta^{-1}(\alpha)\,, \quad \forall \alpha \in \mathrm{Aut}(F_\tau)\,.$$

La démonstration utilise les résultats classiques de Shimura sur le corps modulaire.

Conférences

Septembre 2003, 2 conférences à Stockholm (Noncommutative Geometry Conference, Mittag-Leffler Institute).

Février 2004, 4 conférences à Luminy (Noncommutative Geometry Conference February 8 - 20, 2004 CIRM).

Mars 2004, 1 conférence à Paris (Physique et géométrie noncommutative).

Avril 2004, 1 conférence à Paris (Théorèmes de l'indice en géométrie noncommutative).

Mai 2004, 1 conférence en l'honneur d'Albert Schwarz à UC-Davies.

Mai 2004, 6 conférences à Vanderbilt (Second Spring Institute in Noncommutative Geometry and Operator Algebras).

Juin 2004, 3 conférences à Seattle (Milliman lectures June 1 - 3, 2004 University of Washington, Department of Mathematics Seattle, Washington, USA).

Juin 2004, 1 conférence à Bonn (Workshop on Noncommutative Geometry and Number Theory II June 14 - 18, 2004 MPI Bonn, Germany).

Juillet 2004, 1 conférence à Paris (K-Theory and Noncommutative Geometry July 5 - 17, 2004).

Publications

A. Connes et H. Moscovici, Modular Hecke Algebras and their Hopf Symmetry. Moscow Math. Journal Volume 4 (2004), Number 1.

A. Connes et H. Moscovici, Rankin-Cohen Brackets and the Hopf Algebra of Transverse Geometry. Moscow Math. Journal Volume 4 (2004), Number 1.

A. Connes et M. Dubois-Violette, Moduli Space and Structure of NonCommutative 3-Spheres. (2003), Math QA/0308275.

A. Connes et D. Shlyakhtenko, L^2-Homology for von-Neumann Algebras. (2003), Math QA/0309343.

A. Connes et M. Marcolli, Quantum Statistical Mechanics of Q-lattices. (2004), Math NT/0404128.