

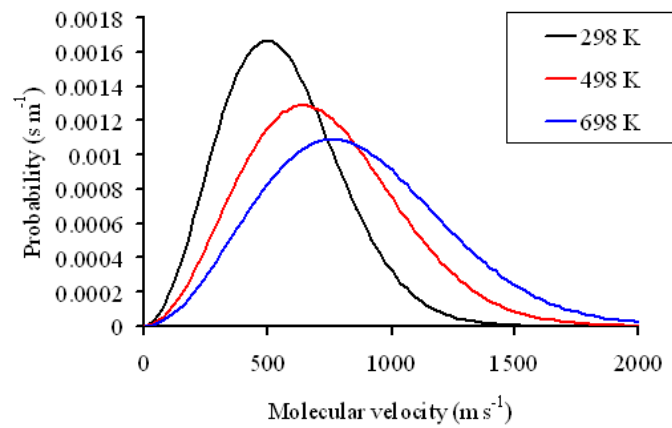
Temps et thermodynamique quantique



Journée Ludwig Boltzmann

Ensemble Canonique

Distribution de Maxwell-Boltzmann,



Ensemble canonique

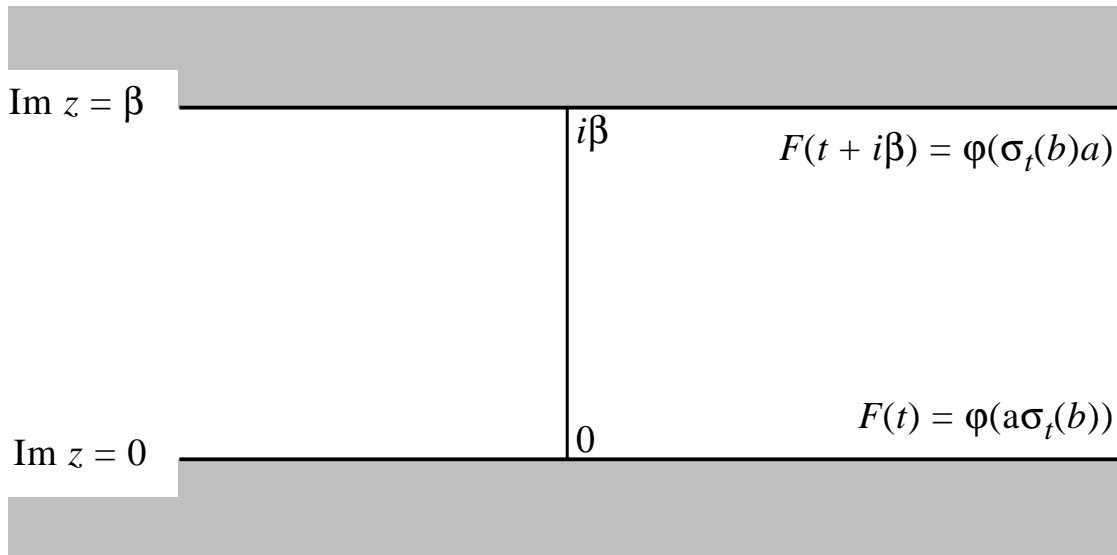
$$\varphi(A) = Z^{-1} \text{tr}(A e^{-\beta H})$$

$$Z = \text{tr}(e^{-\beta H})$$

La condition KMS

$$\varphi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \varphi(1) = 1.$$

$$\sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{A})$$



$$F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y))$$

$$F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tomita (1967) + T (cf. 7)

Théorème

Soit M une algèbre de von Neumann et φ un état normal fidèle sur M , il existe alors un unique groupe à un paramètre

$$\sigma_t^\varphi \in \text{Aut}(M)$$

qui vérifie la condition KMS pour $\beta = 1$.

Thèse (1972)

Théorème (ac)

$$1 \rightarrow \text{Int}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Out}(\mathcal{M}) \rightarrow 1,$$

La classe de σ_t^φ dans $\text{Out}(\mathcal{M})$ ne dépend pas du choix de l'état φ .

Donc une algèbre de von Neumann \mathcal{M} , possède une évolution canonique

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \text{Out}(\mathcal{M}).$$

Noncommutativité \Rightarrow Evolution

Cette évolution est-elle reliée au "temps" ?

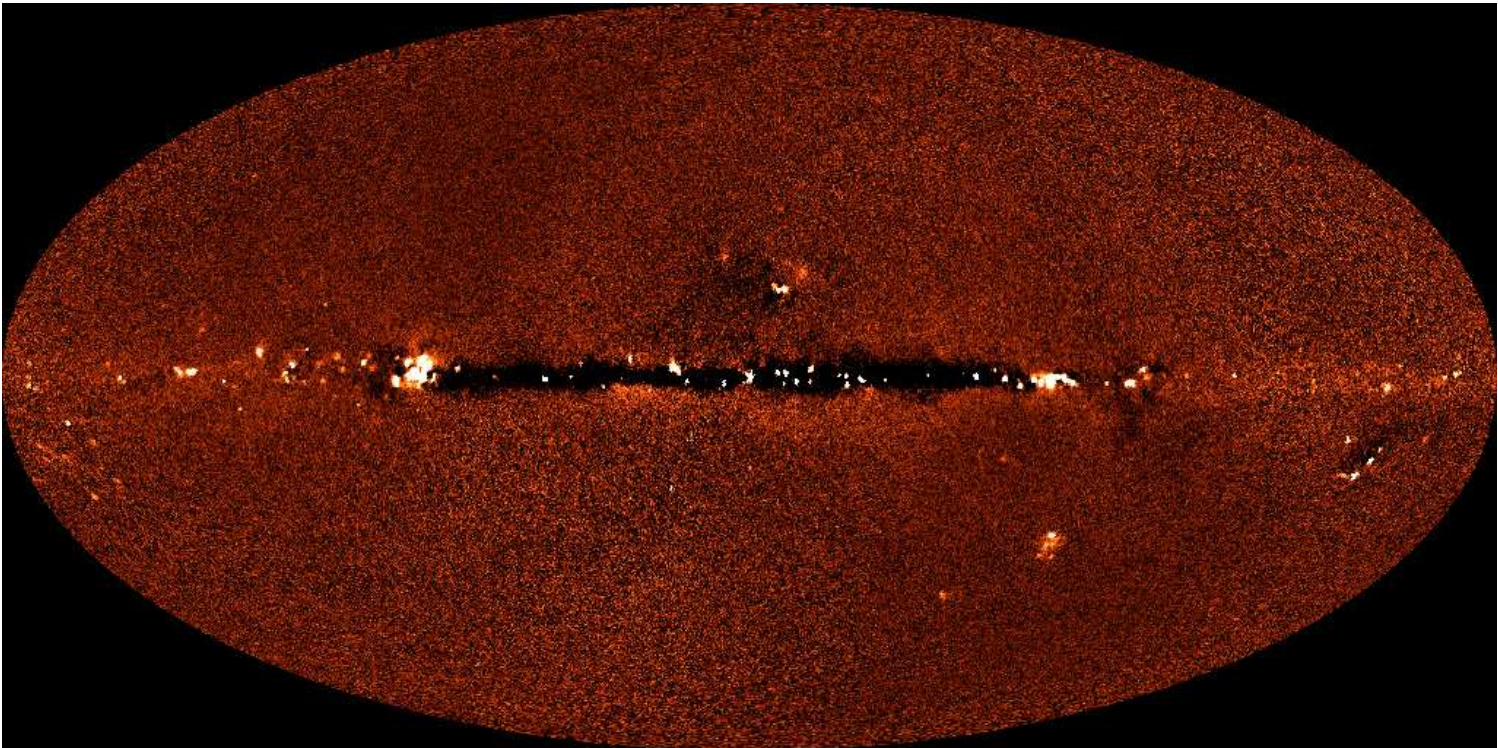


Rovelli 1992 : Origine thermodynamique du temps

1. Nous interprétons le temps comme un groupe à 1- paramètre d'automorphismes de l'algèbre des observables en gravitation.
2. Nous attribuons l'existence et les propriétés du flot à des causes thermodynamiques.
3. Dans un contexte covariant comme celui de la relativité générale la notion de temps n'est plus indépendante de l'état du système comme en physique prérelativiste mais dépend explicitement de l'état dans lequel le système se trouve.

Quelle est l'algèbre des observables en GQ ? ?

Fond infrarouge extragalactique



Notre groupe local de galaxies se déplace à environ 600 km par seconde par rapport à la radiation relique. Le soleil ne se déplace qu'à 370 km par seconde, à cause du mouvement relatif au groupe local.

Frobénius en caractéristique zéro

(ac + c. Consani + m. Marcolli)

1. Thermodynamique des espaces noncommutatifs
2. Catégorie des Λ -modules = catégorie abélienne
($\Lambda =$ catégorie cyclique)
3. Endomotifs

Thermodynamique des espaces noncommutatifs

Refroidir $T \downarrow$:

\mathcal{E}_β états KMS_β extrémaux, pour $\beta > 1$

$$\rho : \mathcal{A} \rtimes_\sigma \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{E}_\beta \times \mathbb{R}_+^*) \otimes \mathcal{L}^1$$

Distiller :

Λ -module $D(\mathcal{A}, \varphi)$ donné par le conoyau du morphisme cyclique composition de ρ avec la trace $\text{Tr} : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{C}$

Action duale :

Spectre de l'action de \mathbb{R}_+^* sur l'homologie cyclique

$$HC_0(D(\mathcal{A}, \varphi))$$

Endomotifs

A est une limite inductive d'algèbres réduites commutatives de dimension finie sur \mathbb{K} et S est un semigroupe d'endomorphismes

$$\rho : A \rightarrow A$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = A \rtimes S$$

Endomorphismes d'une variété algébrique,

$$X_s = \{y \in Y : s(y) = *\}.$$

$$X_{sr} \ni y \mapsto r(y) \in X_s.$$

$$X = \varprojlim_s X_s$$

$$\xi_{su}(\rho_s(x)) = \xi_u(x)$$

Exemple : Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$

Systeme BC

Présentation explicite μ_n , $n \in \mathbb{N}$ et $e(r)$, pour $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, vérifiant les relations

- $\mu_n^* \mu_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\mu_k \mu_n = \mu_{kn}$, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$,
- $e(0) = 1$, $e(r)^* = e(-r)$, et

$$e(r)e(s) = e(r + s)$$

pour tous $r, s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

$$\mu_n e(r) \mu_n^* = \frac{1}{n} \sum_{ns=r} e(s).$$

$$\sigma_t(\mu_n) = n^{it} \mu_n, \quad \sigma_t(e(r)) = e(r).$$

Transition de phase avec BSS

L'unique état KMS au dessus de la température critique est

$$\varphi_\beta(e(a/b)) = b^{-\beta} \prod_{p \text{ prime}, p|b} \left(\frac{1 - p^{\beta-1}}{1 - p^{-1}} \right),$$

et les états KMS extrémaux au dessous de la température critique sont donnés par

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta,\rho}(e(a/b)) &= \frac{\text{Tr}(\pi_\rho(e(a/b))e^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \\ &= \frac{1}{\zeta(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \rho(\zeta_{a/b}^n), \end{aligned}$$

où π_ρ est la représentation de l'algèbre \mathcal{A} sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ donnée par

$$\pi_\rho(\mu_n)\epsilon_m = \epsilon_{nm}, \quad \pi_\rho(e(a/b))\epsilon_m = \rho(\zeta_{a/b}^m)\epsilon_m,$$

où $\rho \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ détermine un plongement dans \mathbb{C} du corps cyclotomique \mathbb{Q}^{cycl} .

Interprétation Cohomologique de la réalisation spectrale

$\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC $\rightarrow (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

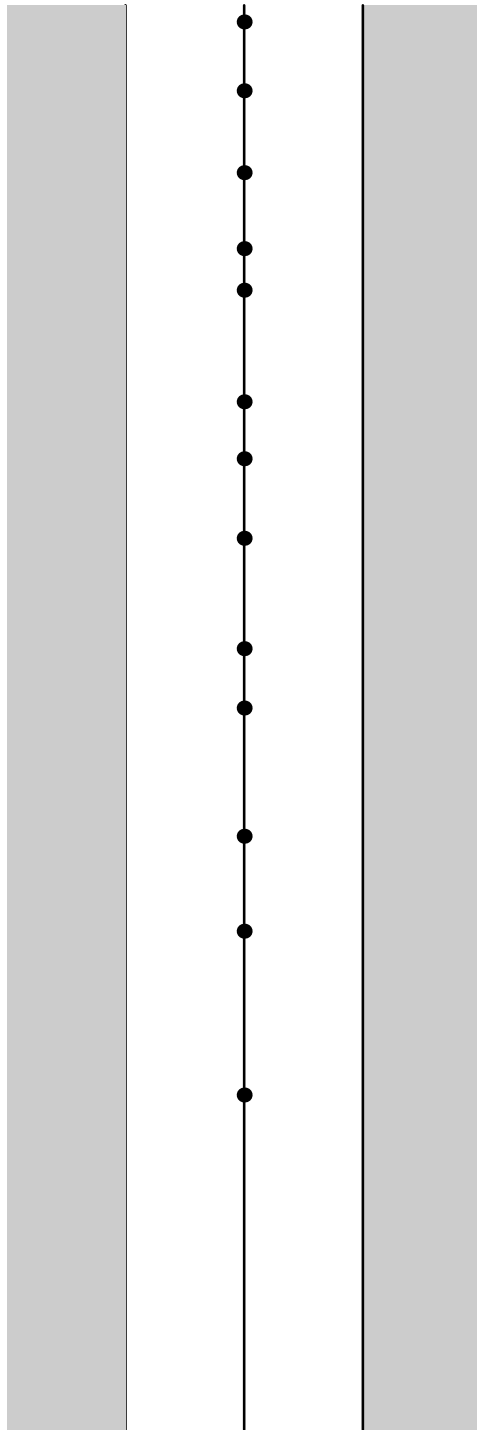
Caractère χ de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow$ projection p_χ .

Théorème

La représentation de \mathbb{R}_+^* dans

$$\mathcal{M} = HC_0(p_\chi D(\mathcal{A}, \varphi))$$

donne la réalisation spectrale des zéros de la fonction L_χ .



Formule Explicite = Formule de Trace (ac
+ rm + cc + mm)

$$\text{Trace}_{H^1}(h) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

où $\sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$ est l'intersection

$$Z(h) \bullet \Delta$$

$$\text{Trace}_{H^1}(h) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \Delta \bullet \Delta h(1)$$

$$- \sum_v \int_{(K_v^*, e_{K_v})} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

Extensions non-ramifiées $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$

Analogue pour \mathbb{Q} de $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$

Corps Global \mathbb{K}	Facteur M
$\text{Mod } \mathbb{K} \subset \mathbb{R}_+^*$	$\text{Mod } M \subset \mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$	$M \rightarrow M \rtimes_{\sigma_T} \mathbb{Z}$
$\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$	$M \rightarrow M \rtimes_{\sigma} \mathbb{R}$
Points $C(\overline{\mathbb{F}}_q)$	$\Gamma \subset X_{\mathbb{Q}}$

KMS et la transition de phase électrofaible

Le potentiel effectif à température T est le même que le potentiel effectif à température nulle dans le produit par un cercle S^1 de longueur $\beta = \frac{1}{T}$.

$$\int dk_0 \rightarrow 2\pi T \sum_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \int dk_0 \rightarrow 2\pi T \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}$$

A une boucle on obtient

$$V(\phi_c) = V_0(\phi_c) +$$

$$\frac{\hbar}{2} T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \log(k^2 + (2\pi n T)^2 + V_0''(\phi_c)) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} + O(\hbar^2)$$

et

$$V_T(\phi_c) = V_{T=0}(\phi_c) +$$

$$\frac{\hbar T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \log\left(1 - \exp[-\sqrt{x^2 + V_0''(\phi_c)/T^2}]\right) x^2 dx$$

Cela rajoute

$$-\frac{11}{360} \pi^2 T^4 + \frac{1}{24} V_0''(\phi_c) T^2 + \dots$$

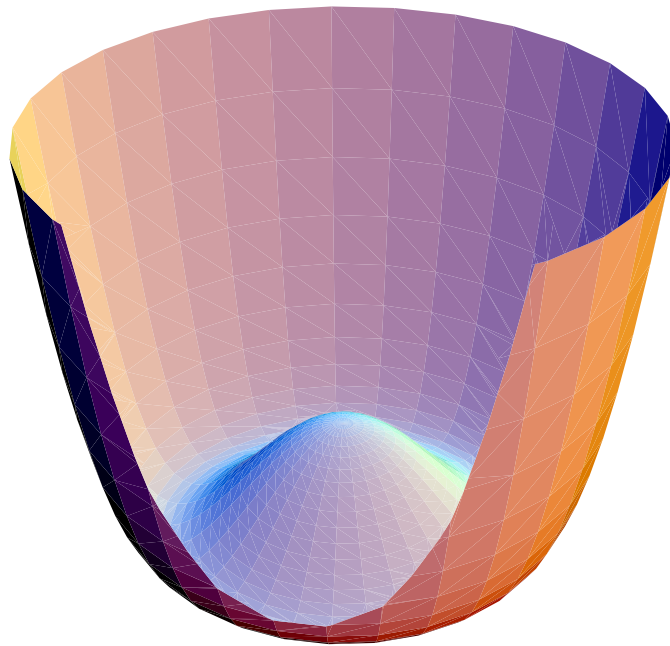
pour les bosons et

$$-\frac{7}{180} \pi^2 T^4 + \frac{1}{12} V_0''(\phi_c) T^2 + \dots$$

pour les fermions.

Brisure de symétrie spontanée

En fait la transition de phase électrofaible est un cas particulier de la brisure de symétrie provenant de la géométrie



\mathbb{Q} -réseaux (ac + mm)

Un \mathbb{Q} -réseau dans \mathbb{R}^n est un couple (Λ, ϕ) , où Λ est un réseau dans \mathbb{R}^n , et

$$\phi : \mathbb{Q}^n / \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Q}\Lambda / \Lambda$$

un homomorphisme de groupes abéliens.

Deux \mathbb{Q} -réseaux (Λ_1, ϕ_1) et (Λ_2, ϕ_2) sont commensurables si les réseaux le sont (*i.e.* $\mathbb{Q}\Lambda_1 = \mathbb{Q}\Lambda_2$) et

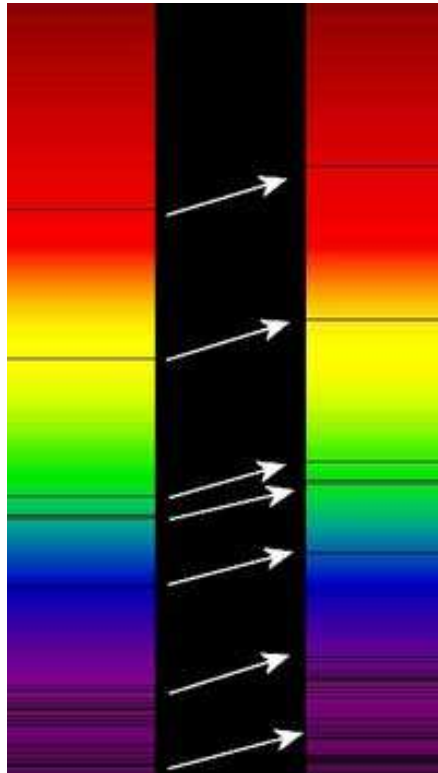
$$\phi_1 \equiv \phi_2 \pmod{\Lambda_1 + \Lambda_2}.$$

Systeme BC = espace des \mathbb{Q} -réseaux de dimension 1 modulo changement d'échelle et commensurabilité.

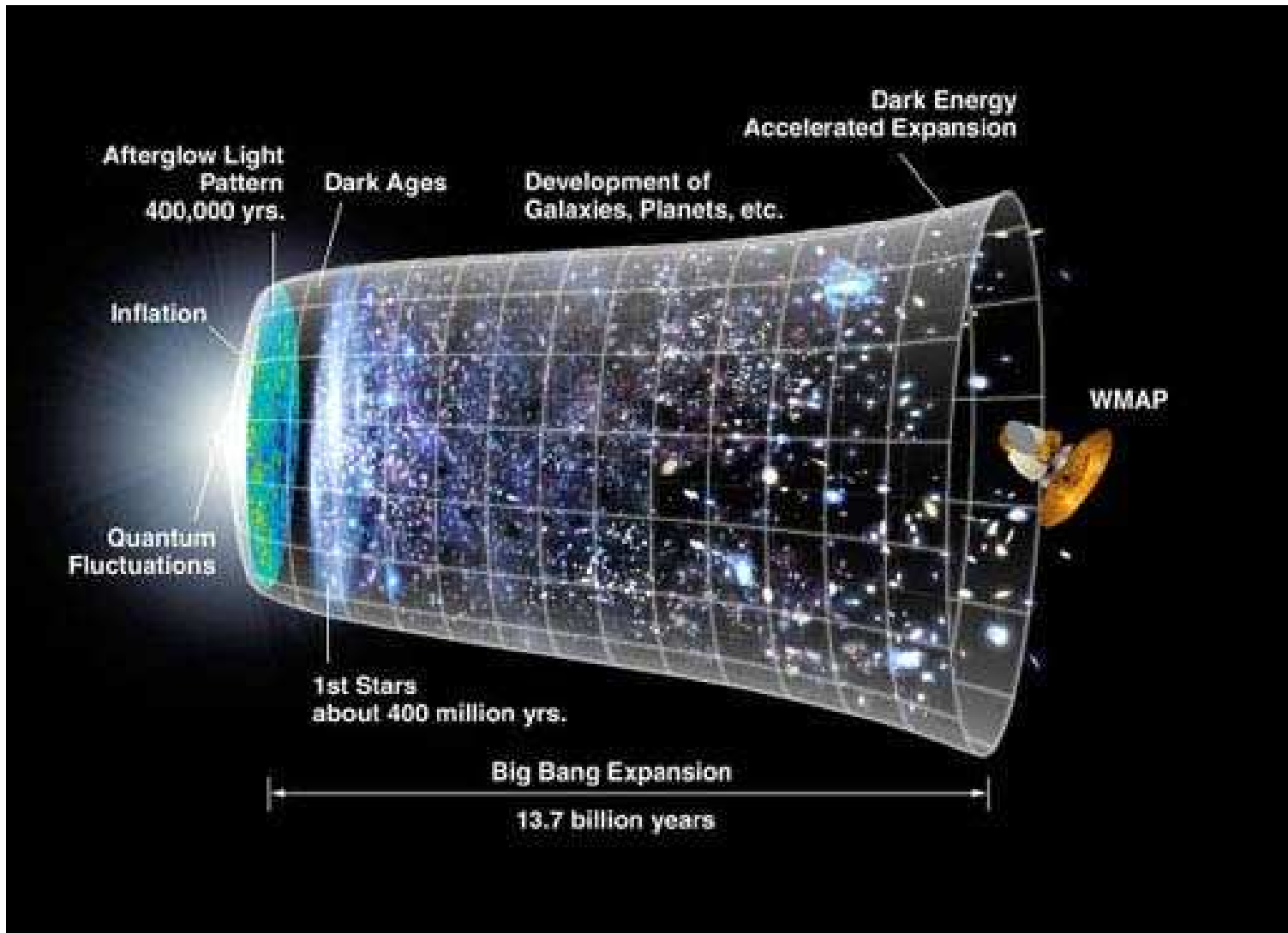
Dimension 2 \Rightarrow transition double

\mathbb{Q} -Réseaux	GQ ?
Couples de \mathbb{Q} -réseaux commensurables	Correspondance Spectrale
Changement d'échelle	$D \mapsto \lambda D$
Composition des couples de \mathbb{Q} -réseaux	Composition des correspondances
Unités du groupoïde	Triplets spectraux réels
$\gamma \rightarrow \gamma^{-1}$	Correspondance contragrédiente
C^* -algèbre de groupoïde	Algèbre de Hecke des fonctions de correspondances
Séries d'Eisenstein	$D \rightarrow \text{Tr}(D^{-n})$
\mathbb{Q} -réseaux inversibles	Triplets spectraux à dualité de Poincaré
Variété de Shimura	Espace des modules d'opérateurs D

Redshift



Les radiations émises dans l'ultraviolet (10^{14} cycles par seconde) sont observées dans l'infrarouge (10^{12} cycles par seconde) : facteur 100 (!)



Références

A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 133–252.

A. Connes, M. Marcolli, *From physics to number theory via noncommutative geometry, Part I : Quantum statistical mechanics of \mathbb{Q} -lattices*, math.NT/0404128.

A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative geometry, from quantum fields to motives* (tentative title), book in preparation. To appear as a co-publication of the American Mathematical Society, Colloquium Publications Series, and Hindustan Book Agency, Texts and Readings in Mathematics Series.

A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomorphisms*, math.QA/0512138.

A. Connes and C. Rovelli. *von Neumann algebra automorphisms and time-thermodynamics relation in generally covariant quantum theories*. Classical Quantum Gravity, 11 (1994) N.12, 2899–2917.

C. Rovelli. *Statistical mechanics of gravity and the thermodynamical origin of time*. Classical Quantum Gravity, 10 (1993) N.8, 1549–1566.

M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*. Lecture Notes in Math., 28, Springer, 1970.