Transparents du premier cours

Deux travaux en collaboration

- **Renormalisation et motifs** ac + M. Marcolli

- **Thermodynamique des Endomotifs** ac + C. Consani et M. Marcolli

NCG $\cap$ Motifs

Deux espaces dont la géométrie reste à élucider

- **Espace-Temps**
- **Spec**$(\mathbb{Z}) = \{$ **nombres premiers** $\}$

$$\begin{tikzcd}
 & QFT \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
NCG \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & Motifs \\
 & Z\hat{e}ta \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Motifs de Grothendieck

$$L(X,s) = \prod_{i=0}^{n} L(H^i(X),s)^{(-1)^{i+1}}$$

"Linéariser" la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps k

Correspondance de Riemann-Hilbert

Catégorie Tannakienne $\rightarrow$ Groupe de Galois motivique

QFT

I Physique et Géométrie

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

$$\frac{d^2\, x^\mu}{dt^2} = -\frac{1}{2}\, g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha})\, \frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt}$$

$$S_E[\, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{\ell^2} \int_M r \sqrt{g}\;\, d^4 x$$

$$S = S_E + S_G + S_{GH} + S_H + S_{Gf} + S_{Hf}$$

II Renormalisation

$$e^{i\,\frac{S}{\hbar}}$$

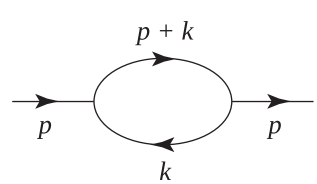
Théorie Perturbative, Dim-Reg + MS

L'Amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par la formule de Dirac et Feynman

$$e^{i\,\frac{S(A)}{\hbar}}$$

$$S\,(A) = \int \mathcal{L}\,(A)\,d^4x$$

Développement perturbatif $\rightarrow$ intégrales divergentes indexées par des graphes de Feynman

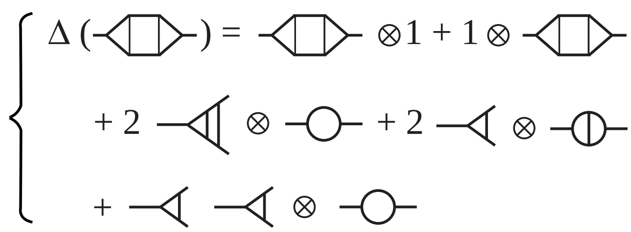


$$= \int \frac{1}{k^2+m^2}\,\frac{1}{((p+k)^2+m^2)}\,d^Dk$$

Algèbre de Hopf des graphes

(Dirk Kreimer → arbres, ac + dk → graphes)

$$\Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma_{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)}$$

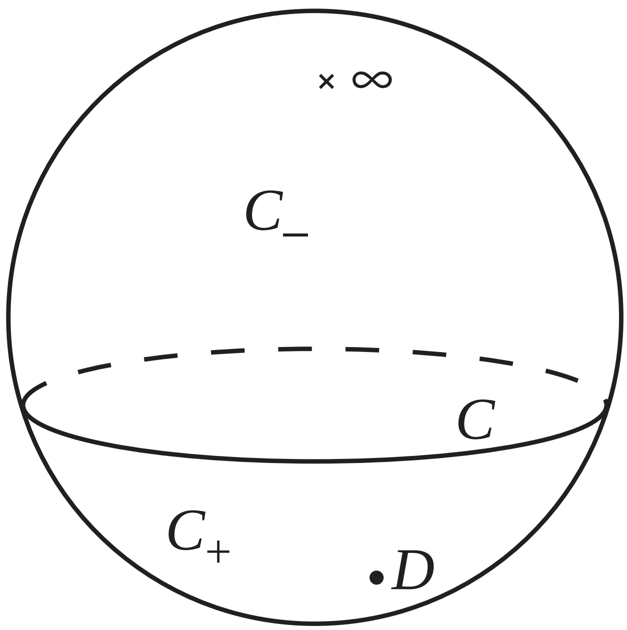


Le groupe de Lie d'une théorie est un groupe pro-unipotent,

$$G = \mathrm{Difg}(\mathcal{T})$$

Décomposition de Birkhoff (ac + dk)

$$\gamma\,(z) = \gamma_{-}(z)^{-1}\,\gamma_{+}(z) \qquad z \in C$$



Renormalisation = Birkhoff

(ac + dk, Dim-Reg + MS)

Groupe de Galois Cosmique (ac + mm)

Conjecturé par Cartier (“La folle journée”)

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{U}(\mathcal{F}(3,5,7,\cdots)_\bullet)^\vee$$

(Valeurs zêta multiples + (ac + dk))

Correspondance de Riemann-Hilbert $\to U$

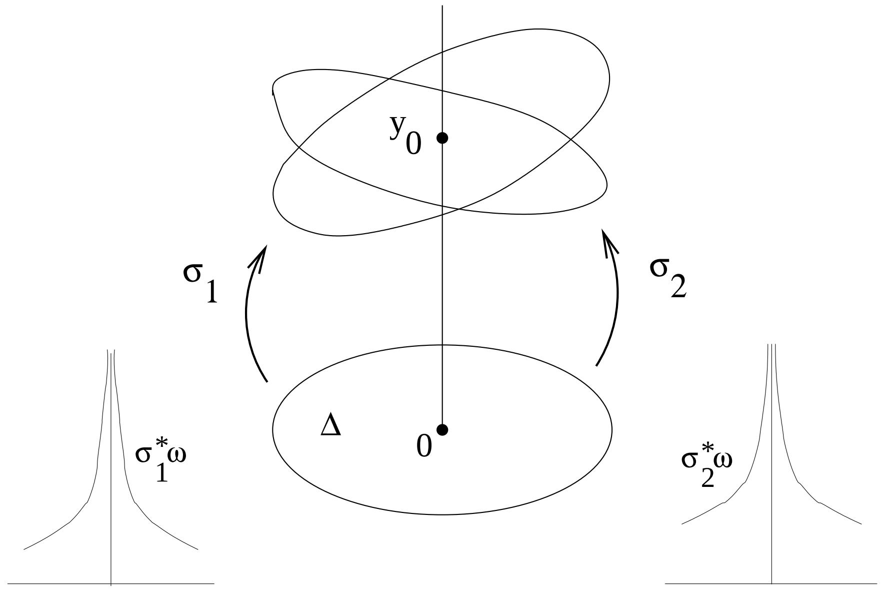
Groupe de symétrie des théories renormalisables

$$U \longrightarrow \mathrm{Difg}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Diff}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathcal{F}(1,2,3,\cdots)_\bullet)^\vee$$

$$U^* \sim G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O})\,, \quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[i][\frac{1}{2}]$$

Dimensions Complexes $\times$ Normalisation



Singularités Irrégulières (Ramis)

$\{$**connections plates équisingulières**$\}$ $=$

catégorie des représentations de dimension finie du groupe algébrique affine $U^* = \mathbb{G}_m \rtimes U$

$$\mathrm{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \cdots)\bullet$$

Repère Singulier Universel

$$\gamma_U(z,v) = \mathsf{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^{Y}(e)\frac{du}{u}} \in U$$

$$\gamma_U(z,v) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k_j>0}$$

$$\frac{e(-k_1)e(-k_2)\cdots e(-k_n)}{k_1\,(k_1+k_2)\cdots(k_1+k_2+\cdots+k_n)}\,v^{\sum k_j}\,z^{-n}$$

Coefficients =

Formule de l'indice locale en NCG

Indice Local en NCG (ac + hm)

$$\varphi_n(a^0, \ldots, a^n) =$$

$$\sum_k b_{n,k} \,⨍ a^0 [D, a^1]^{(k_1)} \ldots [D, a^n]^{(k_n)} \, |D|^{-n-2|k|}$$

$$T^{(k+1)} = \frac{D^2 T^{(k)} - T^{(k)} D^2}{k+1}$$

$$b_{n,k} = (-1)^{|k|} \sqrt{2i}\, \Gamma\left(|k| + n/2\right)$$

$$((k_1 + 1) \ldots (k_1 + k_2 + \ldots + k_n + n))^{-1}$$

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n$$

Dim-Reg $\cap$ NCG

Espaces X_z de dimension z (ac + mm)

t'Hooft-Veltman et Breitenlohner-Maison $\Leftrightarrow$ faire le produit de l'espace-temps euclidien par un triplet spectral X_z de dimension $z \in \mathbb{C}$, Re(z) > 0

$$\mathcal{H}'' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' , \quad D'' = D \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D' .$$

Spectre de dimensions de X_z est réduit à z.

$$\text{Trace}(e^{-\lambda D^2}) = \pi^{z/2} \, \lambda^{-z/2} , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* .$$

NCG

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

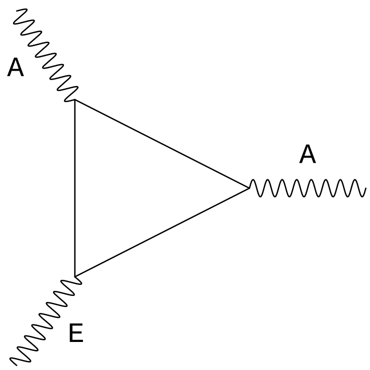
$$\downarrow$$

$ds =$ **Propagateur des Fermions**

GRAVITATION $\cap$ QFT

Mètre étalon $\rightarrow$ Longueur d'onde (Krypton (1967) de la lumière de la ligne orange-rouge dans le spectre du 86Kr puis Césium (1984) deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de C133.

Fermions $\rightarrow$ Géométrie



Fermions	$\psi \in \mathcal{H}$
Symétries internes	**Int**$(\mathcal{A})$ $f \rightarrow u\, f\, u^*$
Bosons de Jauge	**Fluctuations internes**

Triplet Spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)\,, \quad ds = 1/D$

Equation des géodésiques	$\frac{d\psi(t)}{dt} = i\,\lvert D\rvert\,\psi(t)$
Distance géodésique	$d(x,y) = \mathrm{Sup}\,\{\lvert f(x) - f(y)\rvert$ $f \in \mathcal{A}\,,\ \lVert [D,f] \rVert \leq 1\}$
Forme volume	$⨍ f\,\lvert ds\rvert^{n}$
Action d'Einstein	$⨍ f\,\lvert ds\rvert^{n-2}$

Propagateur $= ds \rightarrow$ **Action Fermionique**

Action Bosonique = Action Spectrale

$N(\Lambda) = \#$ valeurs propres de D dans $[-\Lambda, \Lambda]$.

$$N(\Lambda) = \langle N(\Lambda) \rangle + N_{\text{osc}}(\Lambda)$$

$$\langle N(\Lambda) \rangle = S_\Lambda(D) = \sum_{k \in S} \frac{\Lambda^k}{k} ⨍ |ds|^k + \zeta_D(0)\,,$$

$$\zeta_D(s) = \text{Trace}(|D|^{-s})$$

Modèle Standard en couplage minimal

$$\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GH} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{Gf} + \mathcal{L}_{Hf}$$

Action Spectrale (ac+ac)

$$S = \int d^4x \sqrt{g}\, (1/2\kappa_0^2\, R - \mu_0^2 (H^* H)$$

$$+ a_0\, C_{\mu\nu\rho\sigma}\, C^{\mu\nu\rho\sigma} + \ b_0\, R^2 + c_0\, {}^*R^*R + d_0\, R;_\mu{}^\mu$$

$$+ \ e_0 + 1/4\, G^i_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu i} + 1/4\, F^\alpha_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu\alpha}$$

$$+ 1/4\, B_{\mu\nu}\, B^{\mu\nu} + |D_\mu H|^2 - \xi_0\, R|H|^2 + \lambda_0 (H^* H)^2)$$

Modèle Standard

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \otimes \mathcal{A}_F \ , \ \mathcal{H} = \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_F \ ,$$

$$D = D_M \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F$$

Espace Fini

$$D_F = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & \bar{Y} \end{pmatrix}$$

Fluctuations Internes $\rightarrow$ Bosons

$\sum a_i[\gamma_5 \otimes D_F, a_i'] \ \rightarrow$ **Higgs**

$\sum a_i[D_M \otimes 1, a_i'] \ \rightarrow$ **Bosons de jauge**

Questions ouvertes

1) au dela de SM

Neutrinos massifs

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}_L \oplus \mathbb{H}_R \oplus M_3(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{H}_F \to Q \oplus L \oplus \bar{Q} \oplus \bar{L}$$

$$Q = \begin{pmatrix} u_L & u_R \\ d_L & d_R \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \nu_L & \nu_R \\ e_L & e_R \end{pmatrix}$$

donne les **spineurs** pour une extension du groupe Spin_4.

Extension par G_q, $q = j$, $j^3 = 1$.

2) Gravitation

Observables Spectrales (Diff-invariance)

$$\langle \sigma \rangle = \mathcal{N} \int \sigma(D,\psi) e^{-S_\Lambda(D) - \langle \bar{\psi},\, D\,\psi \rangle}\, D[D]\, D[\psi]\, D[\bar{\psi}]$$

$\rightarrow$ Modèle de matrices

Contraintes

Equation Polynomiale de degré = dimension

$U^*\,[D,U] = 1 \rightarrow$ géometrie de S^1

$\sum a_0\,[D,a_1] \cdots [D,a_4] = \gamma \rightarrow$

variétés sphériques (ac + mdv)

Hamiltonien Spectral

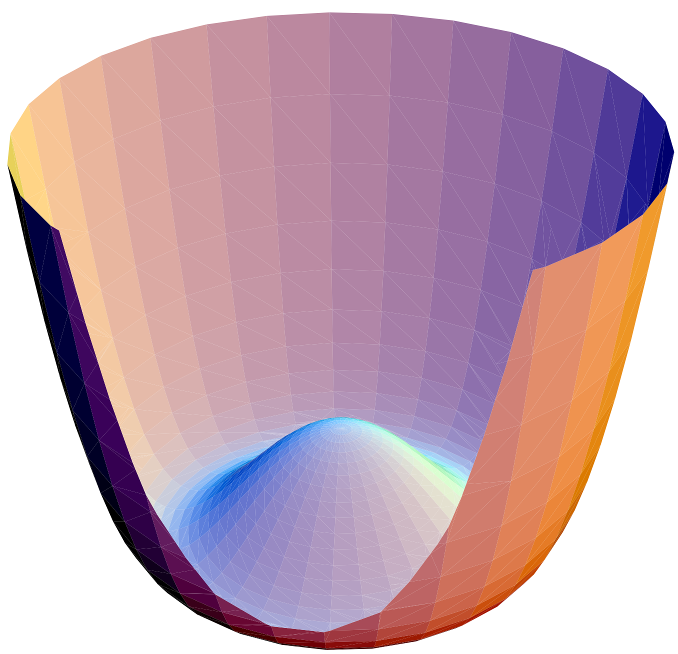
ds = Hamiltonien de Dirac ≥ 0

Symétries

QFT $\longrightarrow$ Groupe de Galois cosmique

Gravité $\longrightarrow$ Difféomorphismes

Brisure de symétrie spontanée



Géométrie Noncommutative et Motifs,

Thermodynamique des Endomotifs
(ac+cc+mm)

Motifs d'Artin → Endomotifs

Une généralisation des Motifs d'Artin codée par une algèbre noncommutative → espace noncommutatif + action du groupe de Galois absolu.

$\mathbb{G}_m(\mathbb{Q}) \rightarrow$ **Interprétation cohomologique des zéros de zêta**

Frobénius en caractéristique 0 = Dual du "temps"

Un espace noncommutatif évolue avec le temps !

$$\sigma_t^{\varphi} \in \mathrm{Out}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M)$$

est *indépendant* du choix de φ

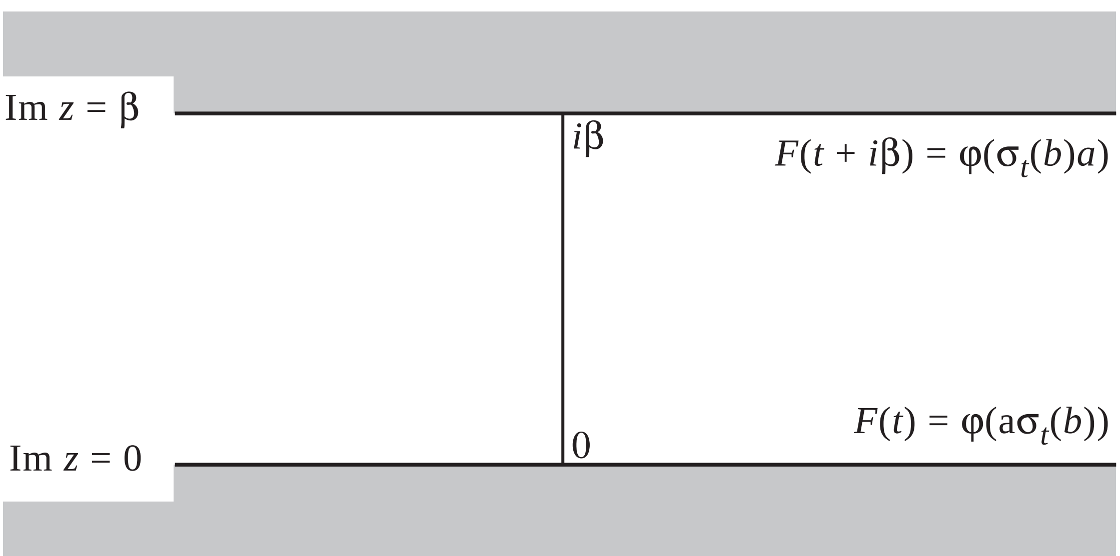
– $\downarrow$ Température $\rightarrow$ Espace classique
– Distillation $\rightarrow$ Module Cyclique
– Action Duale de $\mathbb{R}_+^*$ sur HC_0 = analogue du Frobénius sur la cohomologie étale ℓ-adique
.

Thermodynamique des espaces noncommutatifs

La condition KMS

$$\varphi(x^* x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{A}\,,\ \varphi(1) = 1\,.$$

$$\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$$



$$F_{a,b}(t) = \varphi(a\sigma_t(b)) \quad F_{a,b}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(b)a)$$

$\downarrow$ Température $\to$ Espace classique

$$(\mathcal{A},\varphi)\to\sigma_t\in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$$

Ω_β espace des états KMS_β de type I_∞

$$\varepsilon(x)=\ \mathrm{Trace}(\pi_\varepsilon(x)\,e^{-\beta H})/\ \mathrm{Trace}(e^{-\beta H})$$

$$\Omega_\beta\subset\Omega_{\beta'}\,,\qquad \beta\le\beta'$$

$$\hat{\mathcal{A}}=\mathcal{A}\rtimes_\sigma\mathbb{R}$$

$$\pi_{\varepsilon,H}(\int x(t)\,U_t\,dt)=\int\pi_\varepsilon(x(t))\,e^{itH}\,dt$$

$$\mathbb{R}_+^*\to\tilde{\Omega}_\beta\to\Omega_\beta\,,\qquad \lambda\,(\varepsilon,H)=\ (\varepsilon,H+\log\lambda)$$

Morphisme de distillation

$$\pi\ :\ \hat{\mathcal{A}}\to C(\tilde{\Omega}_\beta,\mathcal{L}^1)$$

Conoyau du Morphisme de Distillation

On veut une catégorie abélienne contenant celle des algèbres noncommutatives :

Catégorie abélienne des Λ-modules

$$\Lambda = \Delta C = C\Delta\,, \quad B\Lambda = \mathbb{P}_\infty(\mathbb{C})$$

Λ est la catégorie cyclique

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\natural = \oplus \mathcal{A}^{\otimes n}$$

La catégorie cyclique Λ

Présentation (J. L. Loday)

$$\delta_j\delta_i = \delta_i\delta_{j-1} \quad \text{for } i < j, \qquad \sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_{j+1}, \quad i \le j$$

$$\sigma_j\delta_i = \begin{cases} \delta_i\sigma_{j-1} & i < j \\ 1_n & \text{if } i = j \text{ or } i = j+1 \\ \delta_{i-1}\sigma_j & i > j+1. \end{cases}$$

Pour obtenir la catégorie cyclique Λ on rajoute pour chaque n un morphisme $\tau_n : [n] \to [n]$, tel que

$$\begin{aligned} &\tau_n\delta_i = \delta_{i-1}\tau_{n-1} \quad 1 \le i \le n, \;\; \tau_n\delta_0 = \delta_n \\ &\tau_n\sigma_i = \sigma_{i-1}\tau_{n+1} \quad 1 \le i \le n, \;\; \tau_n\sigma_0 = \sigma_n\tau_{n+1}^2 \\ &\tau_n^{n+1} = 1_n. \end{aligned}$$

Distillation :

Λ-module $D(\mathcal{A},\varphi)$ qui est le conoyau du morphisme cyclique composition de π avec la trace Tr : $\mathcal{L}^1 \to \mathbb{C}$

Action Duale :

Spectre de l'action canonique de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'homologie cyclique

$$HC_0(\, D(\mathcal{A},\varphi))$$

Endomotifs

A est une limite inductive d'algèbres réduites commutatives de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et S est un semigroupe d'endomorphismes

$$\rho : A \to A$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = A \rtimes S$$

$$\begin{array}{lll} U_\rho^* U_\rho = 1, & U_\rho U_\rho^* = \rho(1), & \forall \rho \in S \\ U_{\rho_1 \rho_2} = U_{\rho_1} U_{\rho_2}, & U^*_{\rho_2 \rho_1} = U^*_{\rho_1} U^*_{\rho_2}, & \forall \rho_j \in S \\ U_\rho \, x = \rho(x) \, U_\rho, & x \, U_\rho^* = U_\rho^* \, \rho(x), & \forall \rho \in S \end{array}$$

Foncteur

Endomotif $\to (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu.

Exemples typiques :

Endomorphismes d'une variété algébrique (groupe),

$$X_s = \{y \in Y : s(y) = *\}.$$

$$X_{sr} \ni y \mapsto r(y) \in X_s.$$

$$X = \varprojlim_s X_s$$

$$\xi_{su}(\rho_s(x)) = \xi_u(x)$$

Exemple : $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC

Système projectif $X_n = \mathrm{Spec}(A_n)$, où $A_n = \mathbb{Q}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ est l'anneau du groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La limite inductive est l'anneau $A = \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. L'endomorphisme ρ_n est donné sur la base canonique $e_r \in \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, par

$$\rho_n(e_r) = \frac{1}{n} \sum_{ns=r} e_s$$

Interprétation Cohomologique de la réalisation spectrale

$\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC $\to (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu Gal$(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Caractère χ de Gal$(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to$ projection p_χ.

Théorème

La représentation de $\mathbb{R}_+^*$ dans

$$\mathcal{M} = HC_0(p_\chi\, D(\mathcal{A}, \varphi))$$

donne la réalisation spectrale des zéros de la fonction L_χ.

Extensions nonramifiées $K \to K \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$

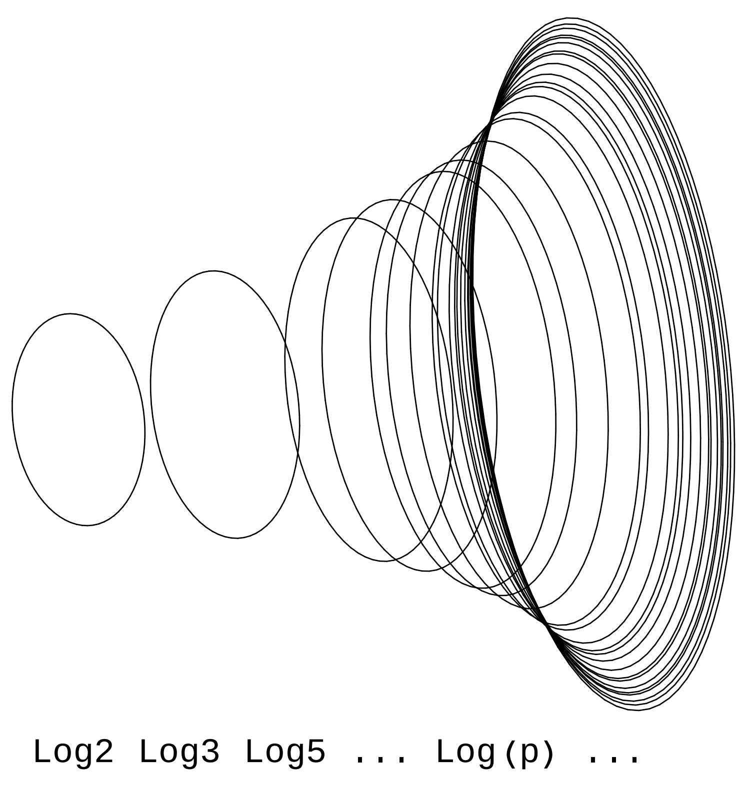
Analogue pour $\mathbb{Q}$ de $K \to K \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$

Corps Global K	**Facteur** M
$\mathrm{Mod}\, K \subset \mathbb{R}_+^*$	$\mathrm{Mod}\, M \subset \mathbb{R}_+^*$
$K \to K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$	$M \to M \rtimes_{\sigma_T} \mathbb{Z}$
$K \to K \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$	$M \to M \rtimes_{\sigma} \mathbb{R}$
Points $C(\bar{\mathbb{F}}_q)$	$\Gamma \subset X_{\mathbb{Q}}$

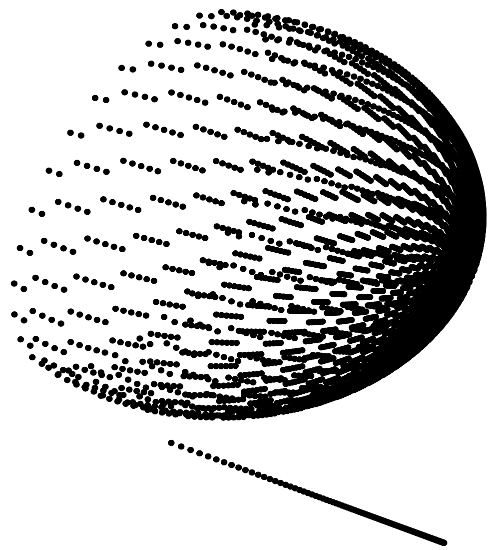
Le sous-espace $\Gamma_{\mathbb{Q}} \subset X_{\mathbb{Q}} \backslash C_{\mathbb{Q}}$

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \cup_{\Sigma_{\mathbb{Q}}} C_{\mathbb{Q}}[v] \subset X_{\mathbb{Q}}$$

$$[v]_w = 1\,, \quad \forall w \neq v\,, \quad [v]_v = 0$$



Corps Global de caractéristique positive



K est le corps des fonctions sur C à valeurs dans $\mathbb{F}_q$.

$$\zeta_K(s) = \prod_{\Sigma_k} (1 - q^{-f(v)s})^{-1}$$

$f(v)$ est le degré de la place $v \in \Sigma_k$.

Equation Fonctionnelle $g =$ genre,

$$q^{(g-1)(1-s)}\,\zeta_K(1-s) = q^{(g-1)s}\,\zeta_K(s)$$

Cohomologie et Frobénius

$$\zeta_K(s) = \frac{P(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

où P est le polynôme caractéristique de l'action du **Frobénius** Fr* dans $H^1_{\text{et}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_\ell)$.

L'analogue de la conjecture de Riemann pour les corps globaux de caractéristique p signifie que les valeurs propres de l'action de Frobénius dans H^1 *i.e.* les nombres complexes λ_j de la factorisation

$$P(T) = \prod (1 - \lambda_j T)$$

sont de module $|\lambda_j| = q^{1/2}$.

Prouvée par Weil (1942) (cas $g = 1$ par Hasse)

Preuve de Weil

La preuve de RH contient deux étapes

- (A) Formules Explicites
- (B) Positivité : Trace$(Z \star Z') > 0$ sauf si Z est $\sim$ triviale.

$$\#\{C(\mathbb{F}_{q^j})\} = \sum (-1)^k \, \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}^{*j} | H^k_{\mathrm{et}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_\ell))$$

Formules Explicites (Riemann)

$$\pi'(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho})$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2-1)\log u} - \log 2$$

$$\pi'(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

Formules Explicites (Weil)

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\rho} \widehat{h}(\rho) = \sum_{v} \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

Formules Explicites = Formules de Trace (ac + rm + cc +mm)

$$\mathrm{Trace}_{H^1}(h) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u$$

où le dernier terme $\sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u$ est un nombre d'intersection :

$$Z(h) \bullet \Delta$$

$$\mathrm{Trace}_{H^1}(h) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \Delta \bullet \Delta\; h(1)$$

$$- \sum_v \int_{(K_v^*, e_{K_v})} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u$$

Le role de la positivité (B) dans la preuve de Weil's est joué par :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- **Toutes les fonctions*** L **satisfont RH.**
- $\mathrm{Trace}_{H^1}(f \star f^\sharp) \geq 0\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{S}(C_K)$.

$$f \to f^\sharp\,, \quad f^\sharp(g) = |\,g|^{-1}\,\bar{f}(g^{-1})$$

*(abéliennes)

Preuve de Weil : Correspondances

$Z\ :\ C \to C,\ P \to Z(P)$

$$U \sim V \Leftrightarrow U - V = (f)$$

$$Z = Z_1 \star Z_2\,, \quad Z_1 \star Z_2(P) = Z_1(Z_2(P))$$

$$Z' = \sigma(Z)$$

$$d(Z) = Z \bullet (P \times C)\,, \quad d^{'}(Z) = Z \bullet (C \times P)$$

Weil définit la *Trace* d'une correspondance

$$\mathrm{Trace}(Z) = d(Z) + d^{'}(Z) - Z \bullet \Delta$$

où Δ est la correspondance identique et $\bullet$ le nombre d'intersection.

Preuve de la positivité (B)

Dans chaque classe de correspondance /(triviales) on construit Z telle que

$$Z > 0\,, \quad d(Z) = g$$

On écrit $Z(P) = Q_1 + \cdots + Q_g$, $Z \star Z'(P)$ lieu de $\sum Q_i \times Q_j$,

$$Z \star Z' = d^{'}(Z)\,\Delta + Y$$

$$Y \bullet \Delta \leq (4\,g - 4)\,d^{'}(Z)\,,$$

$$K(P) = \det\{f_i(Q_j)\}^2$$

$$\Delta \bullet \Delta = 2 - 2\,g$$

$$\mathrm{Trace}(Z \star Z') = 2\,g\,d^{'}(Z) + (2\,g - 2)\,d^{'}(Z) - Y \bullet \Delta$$

$$\geq (4\,g - 2)\,d^{'}(Z) - (4\,g - 4)\,d^{'}(Z) = 2\,d^{'}(Z) \geq 0$$

où $d^{'}(Z) \geq 0$ car Z est effective.

Correspondances	Classe bivariante Γ
Modulo torsion	$KK(A, B \otimes \mathrm{II}_1)$
Effective	Epimor. de C^*-modules
Composition	produit en KK-théorie
Degré	Indice ponctuel $d(\Gamma)$
deg $D(P) \geq g \Rightarrow\sim$ effective	$d(\Gamma) > 0 \Rightarrow \exists K, \Gamma + K$ surj.
Ajuster le degré par les correspondances triviales	Fubini sur les fonctions tests
Corr. de Frobénius	Correspondance Z_g
Formule de Lefschetz	Chern bivariant de $Z(h)$

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*. Comm. Math. Phys. 210 (2000), no. 1, 249–273.

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*. Comm. Math. Phys. 216 (2001), no. 1, 215–241.

A. Connes, M. Marcolli, *Anomalies, Dimensional Regularization and Noncommutative Geometry*, in preparation.

A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative geometry, from quantum fields to motives* (tentative title), book in preparation. To appear as a co-publication of the American Mathematical Society, Colloquium Publications Series, and Hindustan Book Agency, Texts and Readings in Mathematics Series.

A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, International Math. Research Notices, (2004), no. 76, 4073–4091.

A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number theory via Noncommutative Geometry, II : Renormalization, the Riemann–Hilbert correspondence, and motivic Galois theory*, to appear in "Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry" Vol.II. Preprint hep-th/0411114.

A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomotives*, math.QA/0512138.