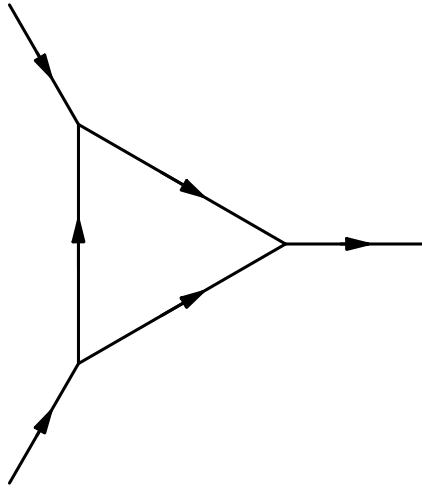


## Transparents du quatrième cours

- Dim-Reg + MS
- BPHZ

# Renormalisation de la constante de couplage

$$g_{\text{eff}} = Z^{-3/2} \left( g - \sum_{\text{diagram}} \frac{U(\Gamma(0,0,0))}{\sigma(\Gamma)} \right)$$



$$g^3 (2\pi)^{-6} \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} \frac{1}{((q-k)^2 + m^2)} d^6 k$$

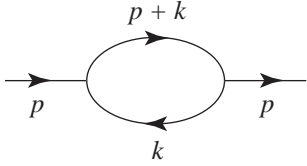
## Lagrangien avec les contre-termes

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2(1-\delta Z) + \left(\frac{m^2 - \delta m^2}{2}\right)\phi^2 + \frac{g - \delta g}{6}\phi^3$$

t'Hooft-Veltman Dim-Reg + MS

(Soustraction Minimale)

## Dim-Reg



$$\rightarrow \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k.$$

$$\frac{1}{P} = \int_0^\infty e^{-sP} ds$$

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} =$$

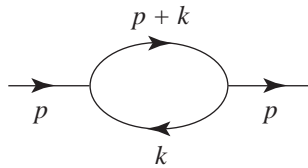
$$\int_{s>0, t>0} e^{-s(k^2+m^2)-t((p+k)^2+m^2)} ds dt.$$

$$-Q(k) = -\lambda ((k + xp)^2 + ((x - x^2)p^2 + m^2)),$$

$$s = (1 - x)\lambda, \quad t = x\lambda$$

## Gaussienne en dimension $D$

$$\int e^{-\lambda q^2} d^D q = \pi^{D/2} \lambda^{-D/2}$$



$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2 + \lambda m^2)} \int e^{-\lambda q^2} d^D q \lambda d\lambda dx \\ &= \pi^{D/2} \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2 + \lambda m^2)} \lambda^{-D/2} \lambda d\lambda dx \\ &= \pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 ((x-x^2)p^2 + m^2)^{D/2-2} dx \end{aligned}$$

## Cas Général

$$I_{\Gamma}(\kappa) = \frac{P(\kappa, p)}{\prod_j F_j(\kappa, p)^2 + m_j^2}$$

$$\int P(\kappa, p) \left( \int e^{-\sum t_j (F_j(\kappa, p)^2 + m_j^2)} dt \right) d^D \kappa =$$
$$\int \left( e^{-\sum t_j m_j^2} \int P(\kappa, p) e^{-\sum t_j F_j(\kappa, p)^2} d^D \kappa \right) dt$$

$$\sum t_j F_j(\kappa, p)^2 = A(t)(q) + \sum t_j F_j(\kappa(t), p)^2,$$

$$q = \kappa - \kappa(t)$$

$$A(t)(q) = \sum t_j F_j(q, 0)^2$$

Gaussienne  $e^{-A(t)(q)} d^D q$

$$\int e^{-A(t)(q)} d^D q = \pi^{LD/2} \det(A(t))^{-D/2}$$

$$\kappa(t) = A(t)^{-1} \ell(t)$$

$$\int e^{-\sum t_j m_j^2 - \sum t_j F_j(\kappa(t), p)^2} f(p, t) \det(A(t))^{-D/2-n} dt$$

$$Q(t) = \det(A(t))$$

## Lemme de Bernstein

Soit  $Q(t)$  un polynôme à  $n$  variables. Il existe un opérateur différentiel polynômial  $L(D)$  à  $n$ -variables à coefficients polynômes en  $D$  et un polynôme  $q(D)$  tels que

$$L(D) Q^{-D/2} = q(D) Q^{-D/2-1}, \quad \forall D$$

Cas non-singulier

$$A Q + \sum A_j \partial_j Q = 1$$

$$L(D) = -\frac{D}{2} A + \sum A_j \partial_j, \quad q(D) = -\frac{D}{2}$$

Cas général :

$\mathcal{F}_k$  le sous-module engendré par  $Q^{-D/2-k}$



## $\mathcal{D}$ -modules (= représentations CCR)

$$p(t, D) Q^{-D/2-k}$$

$$Q^{-D/2-k-1} = P(t, \partial, D) Q^{-D/2-k}$$

$$\mathcal{P}_m = \{p(t, D) Q^{-D/2-m} : \deg p \leq m(\deg Q + 1)\}$$

$$\dim \mathcal{P}_m \sim (\deg Q + 1)^n m^n$$

↓

Nombre de générateurs  $\leq (\deg Q + 1)^n$

**Distribution  $Q(t)^{-D/2}$  sur  $t_j \geq 0$**

Soit  $g$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $t_j \geq 0$ , avec dérivées à décroissance rapide, alors

$$I(D, g) = \int_{t_j \in [0, \infty)} g(t) Q(t)^{-D/2} dt$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ .

$$I(D + 2, g) = q(D)^{-1} I(D, L(D)^* g) + C(D)$$

$L(D)^*$  est l'adjoint de  $L(D)$  et  $C(D)$  terme de bord

## Problème dans le cas général

$$g(p, t) = e^{-\sum t_j m_j^2 - \sum t_j F_j(\kappa(t), p)^2} f(p, t)$$

n'est pas  $C^\infty$  sur  $t_j \geq 0$ .

(terme  $-\text{tr}(C B^{F^*}(t))$  dans l'équation (34) d'Etin-gof)

### Lemme

$$g(p, t) = \sum g_\alpha(t) p^\alpha$$

le développement de Taylor de  $g(p, t)$  en  $p = 0$ . Toutes les fonctions  $g_\alpha(t)$  sont de la forme  $Q(t)^{-|\alpha|} h_\alpha$  avec  $h_\alpha$  de classe  $C^\infty$  sur  $t_j \geq 0$ .

## Prolongement méromorphe

$$b(t, p) = e^{-\sum t_j F_j(\kappa(t, p), p)^2} = e^{a(t, p)}$$

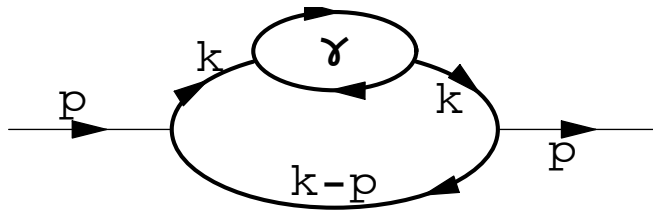
$$\kappa(t, 0) = 0 \text{ d'où } a(t, 0) = 0$$

Taylor(  $b$  ) = polynôme en Taylor(  $a$  )

$\kappa(t, p)$  de la forme  $A(t)^{-1}\ell(t, p)$  avec  $\ell(t, p)$  bilinéaire en  $t$  et  $p$ .

**Théorème** Les coefficients de Taylor en  $p = 0$  de l'expression  $U^z(\Gamma(p_1, \dots, p_N))$  se prolongent en des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ .

## Sous-divergences



$$U(\Gamma(p, -p)) =$$
$$(2\pi)^{-2D} \int \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k-p)^2} \frac{1}{(k+\ell)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D k d^D \ell$$

(et  $g^4 \mu^{2z}$ )

L'intégration en  $\ell$  donne

$$\int \frac{1}{(k + \ell)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell =$$

$$k^{D-4} \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 (x - x^2)^{D/2-2} dx$$

$$\int_0^1 (x - x^2)^{D/2-2} dx = \frac{\Gamma(D/2 - 1)^2}{\Gamma(D - 2)}$$

A des facteurs  $\Gamma$  prés,

$$I = \int (k^2)^{D/2-4} \frac{1}{(k - p)^2} d^D k$$

$$x^{D/2-4} = \Gamma(4 - D/2)^{-1} \int_0^\infty e^{-tx} t^{3-D/2} dt$$

$$I = \Gamma(4 - D/2)^{-1} \int e^{-t_1 k^2 - t_2 (k-p)^2} t_1^{3-D/2} dt_1 dt_2 d^D k$$

$$t_1 = \lambda s, \quad t_2 = \lambda(1 - s)$$

$$t_1 k^2 + t_2 (k - p)^2 = \lambda q^2 + \lambda (s - s^2)p^2$$

$$q = k - (1 - s)p$$

$$I = \Gamma(4 - D/2)^{-1} \pi^{D/2} \int e^{-\lambda(s-s^2)p^2} \lambda^{3-D} s^{3-D/2} \lambda d\lambda ds$$

$$U(\Gamma(p, -p)) = (4\pi)^{-D}$$

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)^3\Gamma(5 - D)\Gamma(D - 4)}{\Gamma(D - 2)\Gamma(4 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{3D}{2} - 5)} (p^2)^{D-5}$$

## Terme non-local $D = 6$

$$\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(5 - D) \rightarrow \text{Pôle double}$$

$$(p^2/\mu^2)^{-z} = \sum \frac{(-z)^n}{n!} \log^n(p^2/\mu^2)$$

$$-g^4 (4\pi)^{-6} \frac{1}{18} p^2 (\log(p^2/\mu^2) + \text{cst.}) \frac{1}{z}$$

Fourier de  $p^2 \log(p^2/\mu^2)$  non-local



## Différentiation / moments externes

$$\partial_p \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k$$

améliore la convergence

$$\int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{l^2} d^D l \sim -\frac{1}{3} \pi^3 k^2 \frac{1}{z}$$

insensible à  $\partial_p$

↓

$(-\frac{1}{3} \pi^3 \frac{1}{z}) \times$  terme fini dans

$$\int \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k-p)^2} d^D k = -\frac{1}{3} \pi^3 p^2 \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \pi^3 p^2 \log p^2 + \text{cst.}$$

## Contre-terme $C(\gamma)$ du sous-graphe divergent

$$\int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell \rightarrow \int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell + \frac{1}{3} \pi^3 k^2 \frac{1}{z}$$

de l'ordre de  $k^2 \log k^2$

$$U(\Gamma(p, -p)) + C(\gamma) U(\Gamma/\gamma(p, -p)) = (2\pi)^{-2D}$$

$$\int \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k-p)^2} \left( \int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell + \frac{1}{3} \pi^3 k^2 \frac{1}{z} \right) d^D k$$

différentiation  $\partial_p^n$  donne la convergence, d'où  
la localité de la divergence (polynôme en  $p$ )

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

## Contre-terme de masse

Sous-divergence devient

$$\int \frac{1}{(k + \ell)^2 + m^2} \frac{1}{\ell^2 + m^2} d^D \ell =$$
$$\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 ((x - x^2)k^2 + m^2)^{D/2-2} dx$$
$$(a m^2 + b k^2)^{\frac{1}{z}}$$

$$\bar{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\gamma_{(0)})U(\Gamma/\gamma_{(0)}) + C(\gamma_{(1)})U(\Gamma/\gamma_{(1)})$$

## Structure externe

$$c_0 m^2 + c_1 k^2$$

$$\sigma_0(f) := m^{-2} \delta_0(f)$$

$$\sigma_1(f) := \left( \frac{d^2}{dk^2} \delta_0 \right)(f) = \left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} f(k) \right|_{k=0}$$

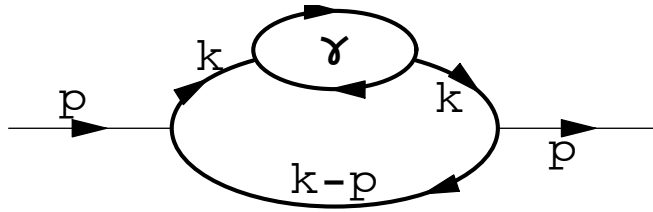
**Sommets**  $\times_j$



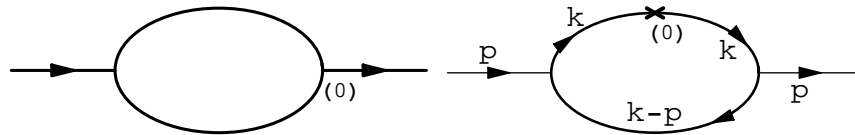
$$(0) \rightarrow m^2$$

$$(1) \rightarrow k^2$$

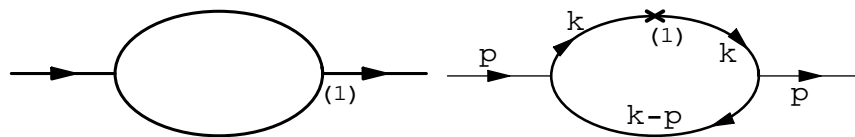
# Préparation



+



+



## Degré de divergence d'un graphe

$$\text{deg}(\Gamma) = -2I + DL$$

$$I = \text{card } \Gamma_{int}^{(1)}, \quad V = \text{card } \Gamma^{(0)}, \quad I - V = L - 1$$

Exemple  $\phi^3$ , on ignore les



car ils améliorent la convergence (et = dimension)

$$3V = 2I + N$$

Deux projections de  $\{(s, \ell) : s \in \ell\}$

$$\text{deg}(\Gamma) = 6 - 2N + (D - 6)L$$

## Sous-graphes

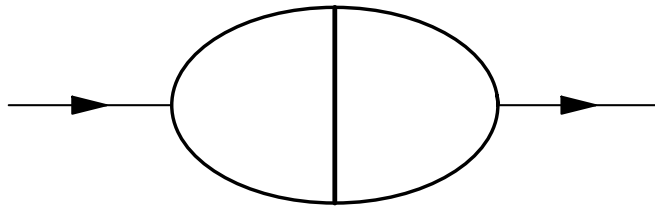
Associé à un sous-ensemble  $\gamma \subset \Gamma_{int}^{(1)}$

$\tilde{\gamma}$  le graphe obtenu en dotant chaque composante connexe de  $\bar{\gamma}$  des arêtes externes provenant de  $\Gamma$ .

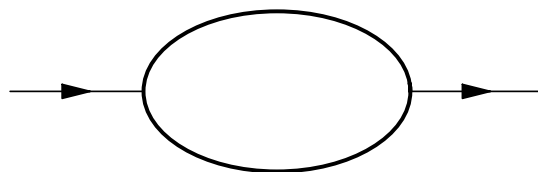
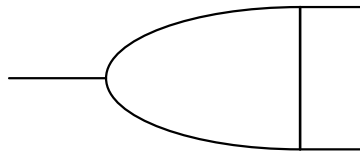
Chaque composante de  $\tilde{\gamma}$  doit être un graphe 1PI de la théorie avec degré de divergence positif.

Le graphe  $\Gamma/\gamma$  doit être un graphe de la théorie.

**Sous-graphes  $\phi^3$ ,  $L = 2$**

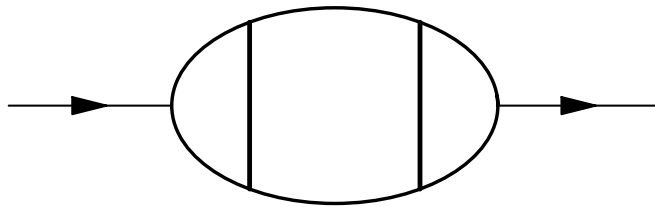


deux sous-graphes de la forme

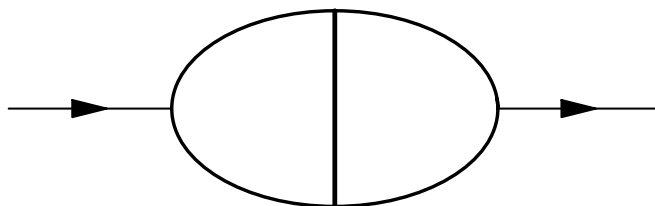
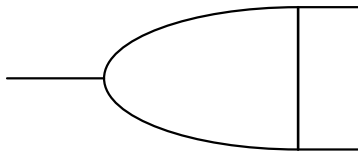




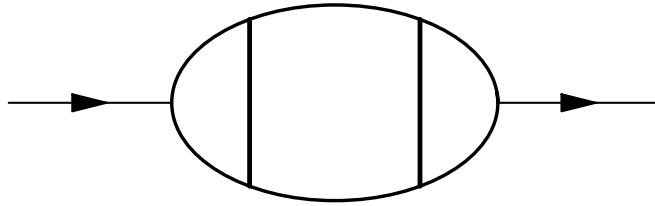
**Sous-graphes  $\phi^3$ ,  $L = 3$**



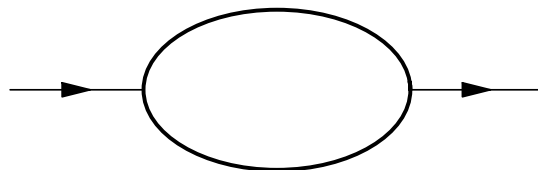
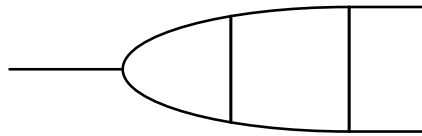
deux sous-graphes de la forme



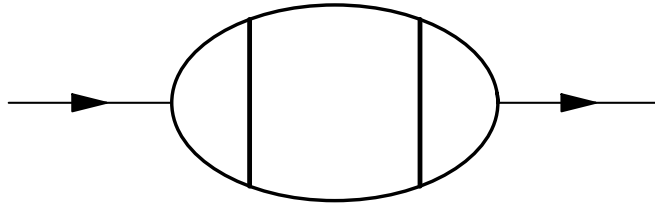
$L = 3$  suite



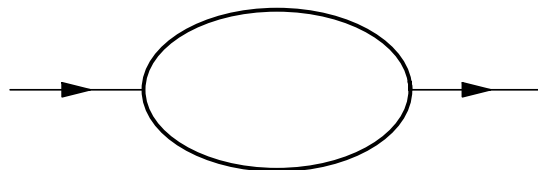
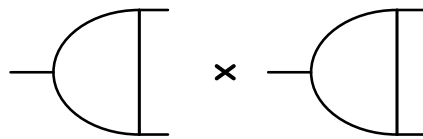
deux sous-graphes de la forme



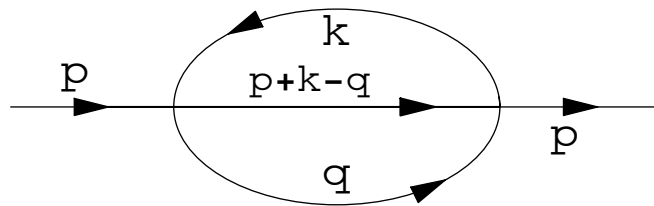
$L = 3$  fin



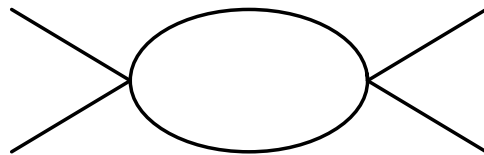
un sous-graphe de la forme



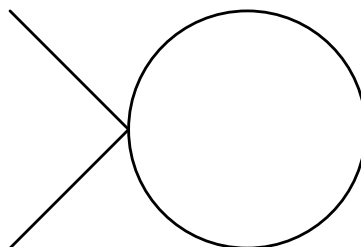
# Sous-graphes $\phi^4$



Trois sous-graphes de la forme  $\gamma \equiv$



$\Gamma/\gamma$



# Bogoliubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann

## Préparation

On prépare d'abord un graphe  $\Gamma$ , en remplaçant la valeur non-renormalisée  $U(\Gamma)$  par

$$\bar{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

## Contre-termes

$$C(\Gamma) = -T(\bar{R}(\Gamma)) = \\ -T \left( U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \right)$$

## Valeur renormalisée

$$R(\Gamma) = \bar{R}(\Gamma) + C(\Gamma) = \\ U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

## Théorème BPHZ

Si l'on calcule avec le Lagrangien

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{\text{--}\bullet\text{--}} \frac{C(\Gamma_{(1)})}{\sigma(\Gamma)} \right) (\partial\phi)^2 + \\ & \frac{m^2}{2} \left( 1 - \sum_{\text{--}\bullet\text{--}} \frac{C(\Gamma_{(0)})}{\sigma(\Gamma)} \right) \phi^2 + \\ & \frac{g}{6} \left( 1 - \sum_{\text{--}\bullet\text{--}} \frac{C(\Gamma)}{\sigma(\Gamma)} \right) \phi^3 \end{aligned}$$

on obtient la valeur renormalisée

$$C(\Gamma) = C(\Gamma_{(0)})m^2 + C(\Gamma_{(1)})p^2$$

Nouveaux sommets avec un indice  $\gamma$  1PI. Tout graphe  $G$  permet de reconstituer un  $\Gamma$  de la théorie initiale.

$$\frac{1}{\sigma(G)} \prod \frac{C(\gamma_i)}{\sigma(\gamma_i)}$$

$K(\gamma)$  = nombre de choix de l'inclusion  $\gamma \subset \Gamma$   
avec  $\Gamma/\gamma = G$

$$\frac{K(\gamma)}{\sigma(\Gamma)} = \frac{1}{\sigma(G) \prod \sigma(\gamma_i)}$$

## Schémas, Dessins d'enfants

- $C$  peut être définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$
- $C$  est la compactification d'un revêtement fini non-ramifié de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dont on a enlevé les trois points  $\{0, 1, \infty\}$ .
- $C$  est isomorphe à la compactification du quotient du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .
- En tant que variété conforme  $C$  est obtenue en recollant entre eux un nombre fini de triangles équilatères (dotés de la structure conforme Euclidienne).

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{etale}}(X_{\bar{\mathbb{Q}}}) \rightarrow \pi_1^{\text{etale}}(X_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1$$



J. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter* , *Funct. Anal. Appl.* Vol. 6 no 4 (1972) 273–285.

J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs in Math. Physics, Cambridge University Press, 1984.

P. Etingof, *Note on dimensional regularization*, in “Quantum Fields and Strings : a Course for Mathematicians” , Vol.I, pp. 595–607. American Mathematical Society, 1999.