Transparents du sixième cours

- **Correspondance de Riemann-Hilbert**
- **Groupe de Renormalisation**
- **Expansionnelle**
- **Connections équisingulières**

Singularités régulières

$$D = \delta^n + b_{n-1}\,\delta^{n-1} + \ldots + b_0\,, \qquad \delta = x\frac{d}{dx}\,,\ b_j \in \mathbb{C}\{x\}$$

$$\Updownarrow$$

$$|x|^{\mu}|y(x)| < C\,, \qquad \forall x\,, \alpha < \mathrm{Arg}\, x < \beta$$

Correspondance de Riemann-Hilbert

Equation régulière singulière

$$\updownarrow$$

Représentation de monodromie

Correspondance inverse

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} = U$$

$$\Gamma \simeq \pi_1(U, x_0) \text{ et } G = \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

G-fibré plat P sur U

$$P = \tilde{U} \times G / \sim \qquad (\tilde{z}, g) \sim (\ell\tilde{z}, \rho(\ell)g), \quad \forall \ell \in \Gamma$$

$$\xi(\tilde{z}) = (\tilde{z}, 1)/\sim \qquad \xi(\tilde{z}) = \xi(\ell\,\tilde{z})\,\rho(\ell), \quad \forall \ell \in \Gamma$$

Section holomorphe globale γ_U de P

$$\xi(\tilde{z}) = \gamma_U(z)\sigma(\tilde{z})\,, \qquad \sigma(\tilde{z}) = \sigma(\ell\,\tilde{z})\,\rho(\ell)$$

$$A(\tilde{z}) = -\frac{d\sigma(\tilde{z})}{dz}\,\sigma(\tilde{z})^{-1}\,, \qquad A(\tilde{z}) = A(\ell\tilde{z})$$

Birkhoff $\to$ régulier singulier

Disque Δ autour de $a_1 = 0$, $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$, V composante de $p^{-1}(\Delta^*)$, $p : \tilde{U} \to U$

$$p/V \sim (\log r, \theta) \to re^{i\theta}$$

$$\exp(2\pi i\, \eta) = \rho(\ell) \in G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\gamma_\Delta(\tilde{z}) = \exp(\eta \,\log r)\ \exp(\eta\, i\theta)$$

$$\gamma(z) = \sigma(\tilde{z})\gamma_\Delta(\tilde{z})^{-1}\,, \quad \Delta^* \to G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\,\lambda(z)\,\gamma_+(z) \qquad z \in \Delta^*$$

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & & & \\ & z^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{k_n} \end{pmatrix}$$

Groupe de renormalisation

Classe $L(G(\mathbb{C}),\mu)$

$$\gamma_{e^t\mu}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z))$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\,\gamma_{\mu^-}(z) = 0\,.$$

1. Le lacet $\gamma_-(z)\,\theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})$ est régulier en $z=0$.
2. La limite
$$F_t = \lim_{z\to 0}\gamma_-(z)\,\theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})$$
sous-groupe à 1-paramètre de $G(\mathbb{C})$. $F_t(X)$ est polynomial en t, $X\in\mathcal{H}$.
3. Générateur de F_t est $\beta := Y$ Res γ,
4. $\gamma_{\mu^+}(z)$ partie positive de Birkhoff de $\gamma_\mu(z)$
$$\gamma_{e^t\mu^+}(0) = F_t\,\gamma_{\mu^+}(0)\,,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

$\gamma_-(z)$ est le Birkhoff$_-$ de $\gamma_\mu(z)$ et
$\theta_{-tz}(\gamma_\mu(z)) = \gamma_{e^{-t}\mu}(z)$,

$$\Downarrow$$

$\gamma_-(z)\,\gamma_\mu(z)$ et $y(z) := \gamma_-(z)\,\theta_{-tz}(\gamma_\mu(z))$
réguliers en $z = 0$.

$$\Downarrow$$

$\theta_{tz}(y(z)) = \theta_{tz}(\gamma_-(z))\,\gamma_\mu(z)$ régulier en $z = 0$,
et le rapport aussi

$$\gamma_-(z)\,\theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}) =$$

$$(\gamma_-(z)\,\gamma_\mu(z))(\theta_{tz}(\gamma_-(z))\,\gamma_\mu(z))^{-1}$$

$$F_t = \lim_{z \to 0} \; \langle \gamma_-(z)\, \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}), X \rangle$$

$$\langle \theta_t(\gamma), X \rangle = \langle \gamma, \theta_t(X) \rangle \,, \quad \forall X \in \mathcal{H} \,, \quad \forall \gamma \in G(\mathbb{C})$$

$$\langle \gamma_-(z)\, \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}), X \rangle =$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes \theta_{tz})\, \Delta(X) \rangle \,,$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1}, S\, X_{(1)} \rangle \, \langle \gamma_-(z)^{-1}, \theta_{tz}\, X_{(2)} \rangle =$$

$$P_1 \left(\frac{1}{z} \right) \, e^{ktz} \, P_2 \left(\frac{1}{z} \right)$$

$$\Downarrow$$

$\langle F_t, X \rangle$ polynôme en t

Multiplicativité de F_t

$G(\mathbb{C})$ groupe topologique

$$\gamma_n \to \gamma \quad \text{ssi} \quad \langle \gamma_n, X\rangle \to \langle \gamma, X\rangle, \quad \forall X \in \mathcal{H}$$

$$\langle \gamma\, \gamma', X\rangle = \sum \langle \gamma, X_{(1)}\rangle\, \langle \gamma', X_{(2)}\rangle$$

$$\lim_{z\to 0} \theta_{sz}(\gamma_-(z)\, \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})) = F_t$$

$$F_{s+t} = \lim_{z\to 0}\ \gamma_-(z)\, \theta_{(s+t)z}\,(\gamma_-(z)^{-1})$$

$$= \lim_{z\to 0}\ \gamma_-(z)\, \theta_{sz}(\gamma_-(z)^{-1})\, \theta_{sz}(\gamma_-(z)\, \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}))$$

$$= F_s\, F_t$$

$$\Downarrow$$

$$F_{s+t} = F_s F_t\,, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Action de F_t sur $\gamma_{\mu^+}(0)$

$\gamma_\mu^+(0)$ est la valeur de $\gamma_-(z)\,\gamma_\mu(z)$ en $z=0$

$\gamma^+_{e^t\,\mu}(0)$ celle de $\gamma_-(z)\,\theta_{tz}(\gamma_\mu(z))$, où de $\theta_{-tz}(\gamma_-(z))\,\gamma_\mu(z)$, en $z=0$

$$\theta_{-tz}(\gamma_-(z))\,\gamma_-(z)^{-1} \to F_t$$

quand $z \to 0$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_{e^t\mu^+}(0) = F_t\,\gamma_{\mu^+}(0)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$$

$$\gamma_-(z)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$$

à coefficients $d_n \in \mathcal{H}^\vee$

$$\Downarrow$$

$$Y\,(d_{n+1}) = d_n \, \frac{d}{dt} F_t|_{t=0} \quad \forall n \geq 1,$$

$$Y(d_1) = \frac{d}{dt} F_t|_{t=0} \,.$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes \theta_{tz})\, \Delta(X) \rangle \to \langle F_t, X \rangle$$

Terme de gauche : $L = \sum P_k(z^{-1})\, e^{ktz}$

$$\partial_t L \to \partial_t \langle F_t, X \rangle |_{t=0} \,, \qquad z \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \frac{d}{dt} F_t|_{t=0}, X \rangle =$$

$$\lim_{z \to 0} z \langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes Y)\, \Delta(X) \rangle$$

$$z\, \langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes Y)\, \Delta(X) \rangle = \text{ const.}$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes Y)\, \Delta(X) \rangle = \frac{1}{z}\, \langle \frac{d}{dt} F_t|_{t=0}, X \rangle \,,$$

$$Y(\gamma_-(z)^{-1}) = \frac{1}{z}\, \gamma_-(z)^{-1}\, \frac{d}{dt} F_t|_{t=0} \,.$$

Expansionnelle

- Dyson $\mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t)\,dt}$
- Araki "expansionnelle"
- Chen "intégrales itérées"
- Transport parallele $dh(u) = h(u)\,\alpha(u)du$

$$\mathcal{H} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_n,\ G \text{ et } \alpha(t) \in \mathrm{Lie}\,G(\mathbb{C})$$

$$\mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t)\,dt} :=$$

$$1 + \sum_1^\infty \int_{a\leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq b} \alpha(s_1)\cdots\alpha(s_n)\ ds_1\cdots ds_n$$

1. Pour tout $X \in \mathcal{H}$ la somme est finie.
2. $\mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t)\,dt} \in G(\mathbb{C})$.
3. C'est la valeur $g(b)$ de l'unique solution $g(t) \in G(\mathbb{C})$ de
$$dg(t) = g(t)\,\alpha(t)\,dt\,, \quad g(a) = 1$$
4. On a
$$\mathsf{T}e^{\int_a^c \alpha(t)\,dt} = \mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t)\,dt}\,\mathsf{T}e^{\int_b^c \alpha(t)\,dt}.$$
5. Soit $\rho : G(\mathbb{C}) \to H$ un homomorphisme vers un groupe de Lie H, alors $\rho(\mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t)\,dt})$ est le transport parallele dans le fibré principal $[a,b] \times H$ avec la connection associée à $\rho(\alpha(t))\,dt$.

$$X \in \mathcal{H} \text{ de degré } n,$$

$$\langle \alpha(s_1) \cdots \alpha(s_m),\, X \rangle = 0 \quad \forall m > n\,,$$

$$\partial_t \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, X \rangle = \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds} \alpha(t), X \rangle$$

$$\partial_t \, \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, X\,Y \rangle = \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds} \alpha(t), X\,Y \rangle =$$

$$\langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds} \otimes \alpha(t), \Delta(X)\,\Delta(Y) \rangle$$

$$= \partial_t \left(\langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, X \rangle \right) \, \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, Y \rangle$$

$$+ \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, X \rangle \, \partial_t \left(\langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, Y \rangle \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, XY \rangle = \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, X \rangle \, \langle \mathsf{T} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds}, Y \rangle$$

Connection plate

$$\varpi = \alpha(s,t)ds + \eta(s,t)dt$$

$$\partial_s \eta - \partial_t \alpha + [\alpha, \eta] = 0.$$

Soit ϖ plate à valeurs dans Lie $G(\mathbb{C})$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\gamma : [0,1] \to \Omega$.

$\mathsf{T}e^{\int_0^1 \gamma^* \varpi}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $[\gamma]$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$

Dérivée logarithmique

(K, δ) corps différentiel, $f \mapsto f' := \delta(f)$

$$G(K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\mathcal{H}, K)$$

$$D(g) := g^{-1} g' \in \mathrm{Lie}\, G(K), \quad \forall g \in G(K),$$

$$\langle D(g), X \rangle = g^{-1} \star g' (X) = \langle g^{-1} \otimes g', \Delta X \rangle$$

et on a

$$\langle D(g), X\, Y \rangle = \langle D(g), X \rangle\, \varepsilon(Y) + \varepsilon(X)\, \langle D(g), Y \rangle$$

Monodromie

$K = \mathbb{C}(\{z\})$, corps différentiel des séries de Laurent convergentes $\delta(f) = \frac{d}{dz} f$

$\mathcal{H} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ connexe, graduée positivement

$\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}(i)$ avec $\mathcal{H}(i)$ finiment engendrée

$\varpi \in$ Lie $G(K)$, pour $K = \mathbb{C}(\{z\})$

1. La représentation $M_i(\varpi) : \mathbb{Z} \to G_i(\mathbb{C})$ est bien définie.
2. La condition de monodromie triviale $M(\varpi) = 1$ est bien définie pour $G(\mathbb{C})$.

$$M_i(\varpi)(\gamma) := \mathsf{T}e^{\int_0^1 \gamma^* \omega_i} \in G_i(\mathbb{C})$$

$$z_i \in \Delta_i^* \,, \quad M_i(\varpi) : \pi_1(\Delta_i^*, z_i) \to G_i(\mathbb{C})$$

Exemple

Soit $\mathbb{G}_a$ le groupe additif, $K = \mathbb{C}(\{z\})$ avec $\delta(f) = \frac{d}{dz}f$. On a $\mathbb{G}_a(K) = K$, $D(f) = \delta(f) = f'$, le résidu de $\varpi \in K$ est une obstruction à l'existence de solutions de $D(f) = \varpi$

Monodromie $= 1 \Rightarrow$ solution

$\mathcal{H} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ connexe, graduée positivement

$\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}(i)$ avec $\mathcal{H}(i)$ finiment engendrée

$\varpi \in \mathrm{Lie}\, G(K)$, pour $K = \mathbb{C}(\{z\})$

$$g_i(z) = \mathrm{T} e^{\int_{z_i}^{z} \omega_i} = \mathrm{T} e^{\int_0^1 \gamma^* \omega_i}$$

$$h_i(z) = \langle g_i(z), X \rangle$$

convergente dans Δ_i^*, nombre fini de termes
$z^{N_i}\, h_i(z)$ bornée dans Δ_i^*

$$p_i \ : \ G_{i+1}(\mathbb{C}) \to G_i(\mathbb{C})$$

surjective

Ne marche pas pour $\mathbb{G}_m$, $\varpi = \frac{1}{z^2} \in K$

Soit $\gamma_\mu(z) \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$ la partie négative de la factorisation de Birkhoff est égale à

$$\gamma_-(z) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^\infty \theta_{-t}(\beta)\, dt}$$

$$\gamma_-(z)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$$

$$Y\,(d_{n+1}) = d_n\,\beta \quad \forall n \geq 1,\; Y(d_1) = \beta$$

$$Y^{-1}(X) = \int_0^\infty \theta_{-s}(X)\, ds,$$

$$\Downarrow$$

$$d_n = \int_{s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n \geq 0} \theta_{-s_1}(\beta)\, \theta_{-s_2}(\beta) \ldots \theta_{-s_n}(\beta) \prod ds_j$$

$$\mathsf{T}' e^{\int_a^b \alpha(t)\, dt} :=$$

$$1 + \sum_1^\infty \int_{a \le s_1 \le \cdots \le s_n \le b} \alpha(s_n) \cdots \alpha(s_1)\; ds_1 \cdots ds_n$$

$$dg(t) = \alpha(t)\, g(t)\, dt\,, \qquad g(t) = \mathsf{T}' e^{\int_0^t \alpha(u)\, du}$$

$$(\mathsf{T} e^{\int_a^b \alpha(t)\, dt})^{-1} = \mathsf{T}' e^{-\int_a^b \alpha(t)\, dt}$$

$$\gamma_-(z)^{-1} = \mathsf{T}' e^{\frac{1}{z} \int_0^\infty \theta_{-s}(\beta)\, ds}$$

Classification des $\gamma_\mu(z) \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$

1. Tout $\gamma_\mu(z)$ est de la forme

   $$\gamma_\mu(z) = \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_\infty^{-z\log\mu}\theta_{-t}(\beta)\,dt}\,\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z)),$$

   pour un unique $\beta \in \mathrm{Lie}\, G(\mathbb{C})$, avec $\gamma_{\mathrm{reg}}(z)$ régulier en $z = 0$.

2. La factorisation de Birkhoff de $\gamma_\mu(z)$ est

   $$\gamma_{\mu^+}(z) =$$

   $$\mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^{-z\log\mu}\theta_{-t}(\beta)\,dt}\,\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z)),$$

   $$\gamma_-(z) = \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^{\infty}\theta_{-t}(\beta)\,dt}$$

3. Réciproquement soit $\beta \in \mathrm{Lie}\, G(\mathbb{C})$ et $\gamma_{\mathrm{reg}}(z)$ régulier, l'expression ci-dessus donne

   $$\gamma_\mu \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$$

$$\gamma_\mu(z) = \gamma_-(z)^{-1}\gamma_{\mu+}(z)$$

$$\alpha_\mu(z) := \theta_{z \log \mu}(\gamma_-(z)^{-1})$$

$$\alpha_{e^s\,\mu}(z) = \theta_{sz}(\alpha_\mu(z))$$

$$\alpha_\mu(z)^{-1}\,\gamma_\mu(z) = \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z))$$

$$\alpha_\mu(z)^{-1} = \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_{-z\log\mu}^{\infty}\,\theta_{-t}(\beta)\,dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_\mu(z) = \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_{\infty}^{-z\log\mu}\,\theta_{-t}(\beta)\,dt}\;\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z))$$

$$\gamma_\mu(z)^{-1} = \theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z))^{-1} \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_{-z\log\mu}^{\infty}\theta_{-t}(\beta)\,dt}$$

$$= \theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z))^{-1}\ \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_{-z\log\mu}^{0}\theta_{-t}(\beta)\,dt}$$

$$\mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_{0}^{\infty}\theta_{-t}(\beta)\,dt}$$

$\gamma_-(z)$ régulier en $1/z$

$$\mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^{-sz}\theta_{-t}(\beta)\,dt} = \mathrm{T}e^{\int_0^1 \alpha(u)\,du}$$

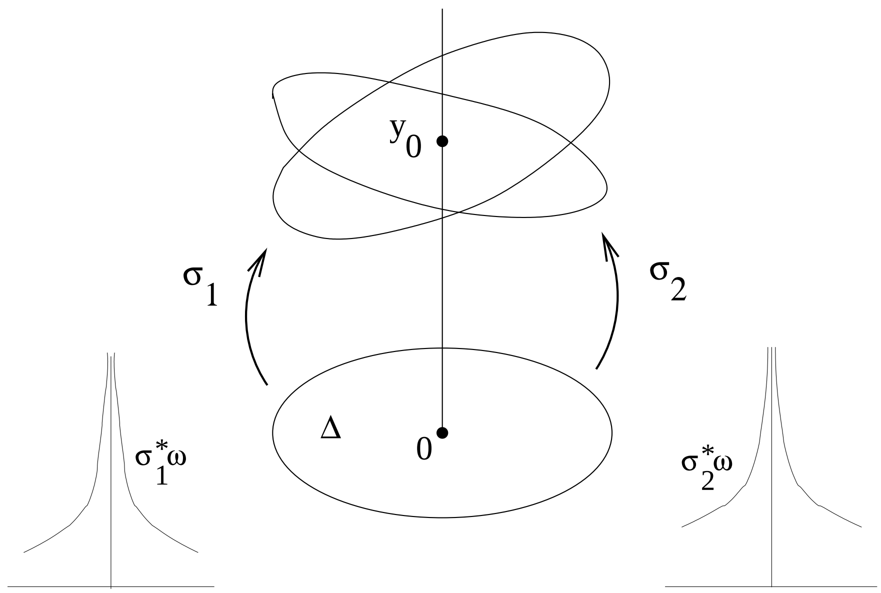
$\pi(u) = -szu$ pour $u \in [0,1]$, $\alpha(u)\,du$ pullback par π de $-\frac{1}{z}\theta_{-t}(\beta)\,dt$

$$\alpha(u)\,du = -\frac{1}{z}\theta_{szu}(\beta)\,(-sz)\,du = s\,\theta_{szu}(\beta)\,du$$

$$\mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^{-sz}\theta_{-t}(\beta)\,dt} = \mathrm{T}e^{s\int_0^1\theta_{szu}(\beta)\,du} \to e^{s\beta}$$

Fibré principal B

$$\sigma : \Delta \to B$$



Fibré principal B, de groupe $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$

$$\mathbb{G}_m \to B \xrightarrow{\pi} \Delta$$

$$V = \pi^{-1}(\{0\}) \subset B,$$

$$B^* = B \setminus V \subset B.$$

$$P = B \times G$$

$$u(b,g) = (u(b), u^Y(g)), \qquad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

$\gamma(z,u) \in G(\mathbb{C})$ invariante ssi

$$\gamma(z,u) = u^Y \, \gamma(z,1)$$

Deux dérivées de γ,

$$\gamma(z,u)^{-1} \, \frac{d}{dz} \gamma(z,u) = u^Y(a(z)) \,,$$

$$a(z) = \gamma(z,1)^{-1} \, \frac{d}{dz} \gamma(z,1)$$

$$\gamma(z,u)^{-1} \, u \, \frac{d}{du} \gamma(z,u) = u^Y(b(z)) \,,$$

$$b(z) = \gamma(z,1)^{-1} \, Y(\gamma(z,1))$$

Connection plate équisingulière

$$\varpi = A(z,v)\,dz + B(z,v)\,\frac{dv}{v},$$

Invariance $\varpi(z,u\,v) = u^{Y}(\varpi(z,v))$

$$\varpi(z,u) = u^{Y}(a(z))\,dz + u^{Y}(b(z))\,\frac{du}{u},$$

$$\frac{db}{dz} - Y(a) + [a,b] = 0.$$

Lemme

ϖ se prolonge à $\Delta^* \times \mathbb{C}$

restriction de ϖ à $\Delta^* \times \{0\}$ est nulle

Monodromies et point base

$$M_{\{z_0\}\times\mathbb{C}^*}(\varpi) = 1$$

$$M_{\Delta^*\times\{u\}}(\varpi) = 1$$

Solution à point base $\Delta^* \times \{0\}$

$$\gamma(z,v) = \mathsf{T}e^{\int_0^v u^Y(b(z))\frac{du}{u}}$$

Invariante (car le choix du point base est invariant)

$$\gamma(z) = \gamma(z,v)|_{v=1}$$

$$\gamma(z)^{-1}d\gamma(z) = a(z)\,dz \quad \text{et} \quad \gamma(z)^{-1}Y\gamma(z) = b(z)$$

Connection plate équisingulière

Nouvelle section $\sigma_s(z) = (z, e^{sz}) \to$
$\gamma_s(z) = \theta_{sz}(\gamma(z))$

équisingularité $\Rightarrow$ γ_s et γ ont le même γ_-

$$\Downarrow$$

$$\gamma(z) = \mathsf{T}e^{-\frac{1}{z}\int_\infty^0 \theta_{-t}(\beta)\,dt}\,\gamma_{\mathrm{reg}}(z),$$

$$v^Y(\mathsf{T}e^{-\frac{1}{z}\int_\infty^0 \theta_{-t}(\beta)\,dt}) = \mathsf{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}$$

$$\gamma(z,v) = \left(\mathsf{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}\right) v^Y(\gamma_{\mathrm{reg}}(z))$$

$$\gamma(z,v) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}$$

$D\gamma$ équisingulière

nouvelle section $v(z)\sigma(z)$, $v(0) = 1$

$$\gamma_v(z) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z}\int_0^{v(z)} u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}$$

$$\gamma_v(z) = \left(\mathsf{T} e^{-\frac{1}{z}\int_0^1 u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}\right)\left(\mathsf{T} e^{-\frac{1}{z}\int_1^{v(z)} u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}\right)$$

$$s \to 1 + s(v(z) - 1) = u\,,$$

$$(1 + s(v(z)-1))^{n-1}\,\beta_n\,\frac{1 - v(z)}{z}\,ds$$

Classification des connections

Deux connections ϖ et ϖ' sur P^* sont équivalentes ssi

$$\varpi' = Dh + h^{-1}\varpi h,$$

avec h une application $\mathbb{G}_m$-invariante à valeurs dans G régulière sur B

Grace au point base $\Delta^* \times \{0\}$ on a

$$\gamma'(z,v) = \gamma(z,v)\, h(z,v)$$

Pour toute ϖ plate équisingulière il existe un unique $\beta \in \mathrm{Lie}\, G(\mathbb{C})$ tel que $\varpi \sim D\gamma$ où

$$\gamma(z,v) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}$$

“La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck–Teichmüller d’une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n’est sans doute que la première manifestation d’un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !”

Pierre Cartier

P. Cartier, *Grothendieck et les motifs*, IHES/M/00/75.

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*. Comm. Math. Phys. 216 (2001), no. 1, 215–241.

A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, International Math. Research Notices, (2004), no. 76, 4073–4091.

A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number theory via Noncommutative Geometry, II : Renormalization, the Riemann–Hilbert correspondence, and motivic Galois theory*, to appear in "Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry" Vol.II. Preprint hep-th/0411114.

D. Gross, *Applications of the renormalization group to high energy physics*, Les Houches 1975, Proceedings, Methods In Field Theory, Amsterdam, (1976), 141–250.