Transparents du septième cours

- **Connections équisingulières et fibrés principaux**
- **Fibrés équisinguliers et groupe Cosmique**
- **Action sur les constantes de couplage**
- **Galois différentiel**
- **Formalisme Tannakien**
- **Groupe de Galois** $\mathrm{Gal}\,(\mathcal{T})$ **d'une théorie** $\mathcal{T}$

Fibrés principaux

H agit à droite

$$\pi\ :\ P \to B\,, \quad P{\times}H \to P\,, \quad (\xi, h) \to R_h(\xi) = \xi\, h$$

connection : 1-forme α sur P à valeurs dans $\mathfrak{h}$

$$\alpha/\pi^{-1}(b) = h^{-1}dh\,, \quad R_a^*(\alpha) = (\mathrm{Ad}\, a^{-1})(\alpha)$$

section $\xi \to \varpi = \nabla(\xi) = \xi^*(\alpha)$

$$\nabla(\xi\, k) = k^{-1}\, dk + k^{-1}\, \nabla(\xi)\, k$$

La section $\eta = \xi\, h^{-1}$ vérifie $\nabla\eta = 0$ ssi
$h^{-1}\, dh = \varpi$

Fibrés principaux équivariants

Fibré trivial

$$P = B \times H\,, \qquad R_a(b,h) = (b, ha)$$

$H_1 \subset H$ sous-groupe fermé

1) Le fibré H-principal P est H_1-équivariant avec

$$h_1\,(b,h) = (h_1\,b, h_1\,h)$$

2) Soit ∇ une connection sur P et $\varpi = \nabla(\xi)$ où $\xi(b) = (b,1)$. Pour tout $h_1 \in H_1$ le pull back ∇' de ∇ par l'action de h_1 sur P vérifie

$$\varpi' = \nabla'(\xi) = h_1^{-1}\,h_1^*(\varpi)\,h_1$$

Soit α la 1-forme de la connection ∇ et $h_1 \in H_1$. Par construction la 1-forme α' du pull back ∇' est le pull back de α par la multiplication L à gauche $L(b,h) = (h_1\, b, h_1\, h)$ d'où

$$\nabla'(\xi) = \xi^*(\alpha') = \xi^*(L^*(\alpha)) = (L \circ \xi)^*(\alpha)$$

On a

$$L \circ \xi(b) = (h_1\, b, h_1) = R_{h_1}\, \xi(h_1\, b)\,, \quad \forall b \in B$$

et $R^*_{h_1}(\alpha) = (\mathrm{Ad}\, h_1^{-1})(\alpha)$

d'où

$$\varpi' = \nabla'(\xi) = h_1^{-1}\, h_1^*(\varpi)\, h_1$$

Connections H_1-invariantes

1) Une connection ∇ sur P est H_1-invariante ssi $\varpi = \nabla\xi$ vérifie

$$h_1^*(\varpi) = h_1\,\varpi\,h_1^{-1}\,, \quad \forall h_1 \in H_1\,.$$

2) Soit γ, $B \to H$ telle que

$$\gamma(h_1\,b) = h_1\,\gamma(b)\,h_1^{-1}\,, \quad \forall h_1 \in H_1\,,$$

alors la transformation de jauge

$$\nabla \to \nabla' = \nabla \circ L_\gamma$$

$$\varpi \to \varpi' = \gamma^{-1}d\gamma + \gamma^{-1}\,\varpi\,\gamma$$

préserve la H_1-invariance des connections.

$\mathbb{G}_m \to B \xrightarrow{\pi} \Delta$, $\mathbb{G}_m$**-fibré sur** Δ**.**

1) $\tilde{P} = B \times G^*$ est G^*-principal $\mathbb{G}_m$-équivariant

$$u\,(b,k) = (u\,b, u\,k)$$

2) $\xi(b) = (b,1)$, $\nabla \to \nabla(\xi)$ est un isomorphisme entre connections à valeurs dans Lie G, $\mathbb{G}_m$-invariantes sur $\tilde{P}^*$ et connections à valeurs dans Lie G sur B^* vérifiant

$$\varpi(z, u(v)) = u^Y(\varpi(z,v)), \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

3) Soit γ, $B \to G$ avec

$$\gamma(u\,b) = u^Y\,(\gamma(b))\,, \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

$L_\gamma(b,\,k) = (b,\,\gamma(b)\,k)$ est un automorphisme du fibré $\mathbb{G}_m$-équivariant G^*-principal $\tilde{P}$.

4) L'équivalence des connections par L_γ correspond à

$$\varpi' = D\gamma + \gamma^{-1}\varpi\gamma,$$

$$\epsilon \; : \; G^* = G \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$$

Soit $\epsilon(\tilde{P})$ le fibré $\mathbb{G}_m$-principal $\mathbb{G}_m$-équivariant image de $\tilde{P}$ et $\tilde{\epsilon} : \tilde{P} \to \epsilon(\tilde{P})$,

1) Une connection ∇ sur $\tilde{P}^*$ est à valeurs dans Lie G ssi $\epsilon(\nabla) = d$.

2) Un automorphisme du fibré $\mathbb{G}_m$-équivariant G^*-principal $\tilde{P}$ est donné par un γ, $B \to G$

$$\gamma(u\,b) = \, u\,\gamma(b)\,u^{-1}\,, \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

ssi il induit l'identité sur $\epsilon(\tilde{P})$.

Extension à $\underline{B} = B \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_a$

$$B_0 = B \times_{\mathbb{G}_m} \{0\} \subset \underline{B} = B \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_a$$

1) Le fibré $\tilde{P}$ se prolonge canoniquement en un fibré $\mathbb{G}_m$-équivariant G^*-principal $\underline{\tilde{P}}$ sur $\underline{B}$.

2) Toute connection invariante ∇ sur $\tilde{P}^*$ avec $\epsilon(\nabla) = d$ se prolonge canoniquement en une connection invariante $\underline{\nabla}$ sur $\underline{\tilde{P}}^*$. Sa restriction à B_0 est la connection triviale d.

3) Tout automorphisme du fibré $\mathbb{G}_m$-équivariant G^*-principal $\tilde{P}$ qui induit l'identité sur $\epsilon(\tilde{P})$ se prolonge à $\underline{\tilde{P}}$ et sa restriction à B_0 est l'identité.

Connection plate équisingulière

Une connection plate ∇ sur $\tilde{P}^*$ avec $\epsilon(\nabla) = d$ est équisingulière ssi pour toute section plate $\nabla\,\eta = 0$ l'unique isomorphisme donné par la trivialisation η entre les restrictions de $\tilde{P}^*$ aux sections $\sigma : \Delta \to B$ avec $\sigma(0) = y_0$ est régulier sur Δ.

Théorème

Soit ∇ une connection plate, équisingulière avec $\epsilon(\nabla) = d$. Il existe un unique $\beta \in \mathrm{Lie}\, G$ et un automorphisme ρ du fibré $\mathbb{G}_m$-équivariant G^*-principal $\tilde{P}$ qui induit l'identité sur $\epsilon(\tilde{P})$ tels que

$$\nabla\rho(\gamma^{-1}) = 0\,, \quad \gamma(z,v) = \mathrm{T}e^{-\frac{1}{z}\int_0^v u^Y(\beta)\,\frac{du}{u}}$$

Soit $\varpi = \nabla(\xi)$. Une solution $\gamma(z,v) \in G$ de

$$D\gamma = \varpi$$

donne une section plate $\eta(b) = (b, \gamma^{-1}(b))$ de $\tilde{P}^*$. Soient $\sigma_j : \Delta \to B$ avec $\sigma_j(0) = y_0$. L'isomorphisme entre $\sigma_j^* \tilde{P}^*$ associé à la trivialisation η est donné par L_k avec $z \to k(z) \in G^*$ et

$$k(z)\, \gamma^{-1}(\sigma_1(z)) = \gamma^{-1}(\sigma_2(z))\,, \quad \forall z \in \Delta^*$$

On a donc

$$k = \sigma_2^*(\gamma)^{-1}\, \sigma_1^*(\gamma)$$

et k est régulier ssi les $\sigma_j^*(\gamma)$ ont la même singularité.

W-connections

Soit (E, W) un fibré vectoriel filtré de base B

$$W^{-n-1}(E) \subset W^{-n}(E)$$

avec une trivialisation des gradués associés

$$Gr_n^W(E) = W^{-n}(E)/W^{-n-1}(E).$$

Une W-connection sur E est une connection ∇ sur $E^* = E|_{B^*}$, telle que

1. La connection ∇ est compatible avec la filtration, *i.e.* préserve les $W^{-n}(E^*)$.
2. La connection ∇ induit la connection triviale sur $Gr^W(E)$.

Deux W-connections ∇_i sur E^* sont W-équivalentes ssi il existe un automorphisme h de E, preservant la filtration, induisant l'identité sur $Gr^W(E)$ et vérifiant $h \circ \nabla_1 = \nabla_2 \circ h$.

W-connection équisingulière

V espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $V = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, fibré trivial $E = B \times V$, $\mathbb{G}_m$-équivariant (par l'action de la graduation) et filtré par W

$$W^{-n}(V) = \oplus_{m \geq n} V_m$$

Une W-connection ∇ sur E est équisingulière ssi elle est plate, $\mathbb{G}_m$-invariante et pour tout système fundamental de solutions de $\nabla \xi = 0$ l'isomorphisme associé des restrictions de E aux sections $\sigma : \Delta \to B$ avec $\sigma(0) = y_0$ est régulier.

La catégorie $\mathcal{E}$ des fibrés plats équisinguliers

Objets : $Obj(\mathcal{E})$

couples $\Theta = [V, \nabla]$, avec V espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué et ∇ une W-connection équisingulière sur $E^* = B^* \times V$. $[V, \nabla]$ est la classe de W-équivalence.

Morphismes : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\Theta, \Theta')$

application linéaire $T : V \to V'$ compatible avec la graduation

$$\nabla_2 = \begin{pmatrix} \nabla' & T\,\nabla - \nabla' T \\ 0 & \nabla \end{pmatrix} \sim \nabla_1 = \begin{pmatrix} \nabla' & 0 \\ 0 & \nabla \end{pmatrix}.$$

Produit tensoriel

$$(E, \nabla) \otimes (E', \nabla') = (E \otimes E', \nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla')$$

Algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$ et le groupe $\mathbb{U}^*$

Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{U}} = \mathcal{F}(1, 2, 3, \cdots)_\bullet$ l'algèbre de Lie libre engendrée par les éléments e_{-n} de degré n, $n > 0$. L'algèbre de Hopf

$$\mathcal{H}_{\mathbb{U}} := U(\mathcal{F}(1, 2, 3, \cdots)_\bullet)^\vee,$$

duale graduée de l'algèbre enveloppante $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$. On note $\mathbb{U}$ le schéma en groupes affine associé à $\mathcal{H}_{\mathbb{U}}$, et par $\mathbb{U}^*$ le produit semidirect $\mathbb{U}^* = \mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$, avec l'action donnée par la graduation.

Théorème

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des fibrés plats équisinguliers. Soit $\omega : \mathcal{E} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ le foncteur $\omega(\Theta) = V$, pour $\Theta = [V, \nabla]$. Alors $\mathcal{E}$ est une catégorie Tannakienne neutre, ω est un foncteur fibre et $\mathcal{E}$ est équivalente à la catégorie des représentations $\mathrm{Rep}_{\mathbb{U}^*}$ du schéma en groupes affine $\mathbb{U}^*$.

Soit V un espace vectoriel gradué de dimension finie sur k. Soit G le groupe algébrique unipotent défini par les conditions

$$S\,W_{-n}(V) = W_{-n}(V),$$

où $W^{-n}(V) = \oplus_{m \geq n} V_m$, et

$$S|_{Gr_n} = 1,$$

où Gr_n est le gradué associé.

W-connection plate équisingulière sur $E^* = B^* \times V$

$$\updownarrow$$

connection plate équisingulière sur $\tilde{P}^*$

Repère Singulier Universel

$$\gamma_U(z,v) = \mathsf{T}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{v}} \mathbf{u}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{e})\,\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{u}}} \in U$$

$$\gamma_U(-z,v) = \sum_{n\geq 0}\ \sum_{k_j>0}$$

$$\frac{e(-k_1)e(-k_2)\cdots e(-k_n)}{k_1\,(k_1+k_2)\cdots(k_1+k_2+\cdots+k_n)}\,v^{\sum k_j}\,z^{-n}$$

Soit $\Theta = (V, \nabla)$ un objet de $\mathcal{E}$. Il existe une unique représentation $\rho = \rho_{\Theta}$ de U^* dans V, telle que la restriction de ρ à $\mathbb{G}_m$ soit la graduation de V et

$$D\rho(\gamma_U) \simeq \nabla,$$

où γ_U est le repère singulier universel.

Soit ρ une représentation de U^* dans V, il existe un unique objet de $\mathcal{E}$ qui lui corresponde.

Morphismes

Soit (V, ∇) un objet de $\mathcal{E}$.

1. Pour tout $S \in \mathrm{Aut}(V)$ compatible à la graduation, $S \nabla S^{-1}$ est une connection plate équisingulière.
2. $\rho_{(E, S \nabla S^{-1})} = S\, \rho_{(E,\nabla)}\, S^{-1}$.
3. $S \nabla S^{-1} \sim \nabla \Leftrightarrow [\rho_{(E,\nabla)}, S] = 0$.

$$T \in \mathrm{Hom}(\Theta, \Theta') \Leftrightarrow T\, \rho_{\Theta} = \rho_{\Theta'}\, T$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

$$U^* \sim G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O}) , \quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[i][\frac{1}{2}]$$

Groupe de Galois motivique (motifs de Tate mixtes) du schéma S_4 des entiers cyclotomiques mais cet isomorphisme n'est pas canonique

$$\alpha(z)dz = \sum_{a \in \mu_N \cup \{0\}} \frac{dz}{z-a} \, e_a$$

Coefficient de $(-1)^m \, e_{\zeta_1} \, e_0^{k_1-1} \, e_{\zeta_2} \, e_0^{k_2-1} \ldots \, e_{\zeta_m} \, e_0^{k_m-1}$ dans

$$\gamma = \mathrm{T}\mathbf{e}^{\int_0^1 \alpha(\mathbf{z}) \, \mathbf{dz}}$$

est

$$\mathrm{Li}_{\,k_1,\ldots,k_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

$$\sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_m} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_m^{n_m}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \ldots n_m^{k_m}}$$

Difféographismes et Difféomorphismes

$$\left(g + \sum \quad g^{2\ell+1} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\right) \left(1 - \sum \quad g^{2\ell} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)}\right)^{-3/2}$$

Théorème (ac+dk)

$$\mathrm{Difg}(\varphi^3_6) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}$$

Groupe de Galois Cosmique (ac + mm)

Conjecturé par Cartier (“La folle journée”)

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{U}(\mathcal{F}(3,5,7,\cdots)_\bullet)^\vee$$

(Valeurs zêta multiples + (ac + dk))

U groupe de symétrie des théories renormalisables

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathcal{F}(1,2,3,\cdots)_\bullet)^\vee$$

$$U \longrightarrow \mathrm{Difg}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Diff}$$

Groupe de renormalisation $\mathbb{G}_a \to U$

Extension de Picard-Vessiot

(K, δ) corps différentiel, (M, ∇) module différentiel

$$\nabla(a\, m) = \delta(a)\, m + a\, \nabla\, m$$

$$M = K^n, \quad \nabla = d + A$$

– R est une k-algèbre différentielle
– R n'a pas d'idéal différentiel non-trivial
– $\exists F \in \mathsf{GL}_n(R)$, $\delta(F) + A\, F = 0$
– R engendré par les coefficients de F

R existe et est unique à $\sim$ prés, pas de diviseur de zéros $\to$ corps des fractions L

Deux exemples

Soit $a \in K$, $a \notin \mathrm{Im}\delta$ alors adjoindre la primitive de a donne le système

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Extension de Picard-Vessiot E est le corps $E = K < f >$ des fractions de $R = K[f]$ où f est la primitive de a. Le groupe de Galois est $G(E/K) = \mathbb{G}_a(\mathbb{C})$ agissant par $f \to f + c$.

Soit $a \in K$,

$$\delta(u) = a\,u$$

Soit $R = K[u, u^{-1}]$ avec u solution formelle. Si R n'a pas d'idéal differentiel alors R c'est l'extension de Picard-Vessiot et E le corps des fractions. Le groupe de Galois est $G(E/K) = \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ par $u \to \lambda\,u$.

Galois Différentiel $\mathsf{Gal}_K(D) = \mathsf{Aut}_K(R, d)$

$$G \to \mathsf{Aut}(V)\,, \quad V = \{\xi \,:\, \xi' + A\xi = 0\}$$

$\mathsf{Gal}_K(D)$ est un groupe algébrique

sous-corps différentiel de $L \leftrightarrow$ sous-groupe algébrique

Théorème

Les conditions suivantes sur une équation D sont équivalentes :

(i) L'équation est résoluble par les étapes
- Adjonction de primitives
- Adjonction d'exponentielles de primitives
- Extensions algébriques finies

(ii) Le groupe de Galois différentiel est résoluble

Equation régulière D modulo jauge	Représentation de π_1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{Gal}_K(D)$	Zariski de $\mathrm{Im}\,\pi_1$
Equation D modulo jauge	Représentation de π_1^{wild} dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{Gal}_K(D)$	Zariski de $\mathrm{Im}\,\pi_1^{wild}$

Formalisme Tannakien

Catégorie Abélienne $\mathcal{C}$:

Exemple : la catégorie des espaces vectoriels filtrés n'est pas abélienne, car pour $f : E \to F$ on n'a pas

$$E/\mathrm{Ker}\, f \sim \mathrm{Im}\, f \subset F$$

(filtration quotient $\neq$ filtration induite)

$\otimes$-catégorie rigide $\mathcal{C}$

$\otimes$-catégorie $\mathcal{C}$: k-linéaire avec $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

– $\exists 1 \in Obj(\mathcal{C})$ avec End(1) $\cong k$ et isomorphismes fonctoriels

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z$$

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

$$l_X : X \otimes 1 \to X \quad \text{and} \quad r_X : 1 \otimes X \to X.$$

– Commutativité : $c_{Y,X} = c_{X,Y}^{-1}$

$\otimes$-catégorie rigide $\mathcal{C}$: dualité $\vee : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$

– $\forall X \in Obj(\mathcal{C})$ le foncteur $- \otimes X^\vee$ est adjoint à gauche de $- \otimes X$ et $X^\vee \otimes -$ adjoint à droite de $X \otimes -$.
– Morphisme d'évaluation $\epsilon : X \otimes X^\vee \to 1$ et unité $\delta : 1 \to X^\vee \otimes X$ avec $(\epsilon \otimes 1) \circ (1 \otimes \delta) = 1_X$ et $(1 \otimes \epsilon) \circ (\delta \otimes 1) = 1_{X^\vee}$.

Foncteurs $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$

fidèle : ω : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\omega(X),\omega(Y))$ injection

additif : ω : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\omega(X),\omega(Y))$ k-linéaire

exact : $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ exact $\Rightarrow$ $0 \to \omega(X) \to \omega(Y) \to \omega(Z) \to 0$ exact

$\otimes$-foncteur : isomorphismes fonctoriels $\tau_1 : \omega(1) \to 1$ et $\tau_{X,Y} : \omega(X \otimes Y) \to \omega(X) \otimes \omega(Y)$

Foncteur fibre, catégories tannakiennes $\mathcal{C}$ une $\otimes$-catégorie k-linéaire rigide : foncteur fibre $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_K$, $\otimes$-foncteur exact et fidèle, K extension de k.

$\mathcal{C}$ tannakienne (= a un foncteur fibre), tannakienne neutre ($K = k$)

(Grothendieck, Savendra-Rivano, Deligne, ...)
$\mathcal{C}$ tannakienne neutre $\Rightarrow \mathcal{C} \cong \mathrm{Rep}_G$
$G = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ schéma en groupe affine $\mathrm{Gal}(\mathcal{C})$

Correspondance de Riemann–Hilbert

Formalisme Tannakien appliqué aux catégories de systèmes différentiels

$(K, \delta) =$ corps differentiel

e.g. $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ ou $K = \mathbb{C}((z))$

Catégorie $\mathcal{D}_K$ des modules différentiels sur K :

Objets (V, ∇), espace vectoriel sur K et connection

$\mathbb{C}$-linéaire $\nabla : V \to V$ avec $\nabla(fv) = \delta(f)v + f\nabla(v)$, pour tout $f \in K$ et $v \in V$

Morphismes $\mathrm{Hom}((V_1, \nabla_1), (V_2, \nabla_2))$ K-linéaires $T : V_1 \to V_2$ avec $\nabla_2 \circ T = T \circ \nabla_1$

$(V_1, \nabla_1) \otimes (V_2, \nabla_2) = (V_1 \otimes V_2, \nabla_1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_2)$

et dual $(V, \nabla)^\vee$

Foncteur fibre $\omega(V, \nabla) = \mathrm{Ker}\,\nabla$. Catégorie tannakienne neutre $\mathcal{D}_K \cong \mathrm{Rep}_G$

Exemple : ODE $\delta(u) = Au$, sous-catégorie de $\mathcal{D}_K \Rightarrow$ groupe de Galois différentiel (Aut de Picard-Vessiot)

Exemple : régulier singulier $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Rep}_G$ schéma en groupe affine $G = \bar{\mathbb{Z}}$ dual de $\mathcal{H} = \mathbb{C}[e(q), t]$, pour $q \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, avec $e(q_1 + q_2) = e(q_1)e(q_2)$ et coproduit $\Delta(e(q)) = e(q) \otimes e(q)$ et $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$.

Pour $K = \mathbb{C}((z))$, schéma en groupe affine $G = \mathcal{T} \rtimes \bar{\mathbb{Z}}$ tore exponentiel de Ramis $\mathcal{T} = \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^*)$, $\mathcal{B} = \cup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{B}\nu$, $\mathcal{B}_\nu = z^{-1/\nu}\mathbb{C}[z^{-1/\nu}]$.

Recalibrage des exponentielles (Galois)

$$e^{P(z^{-1/\nu})} \to \lambda\, e^{P(z^{-1/\nu})}$$

Pour $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ nouveaux générateurs : phénomène de Stokes (resommation des séries divergentes, dérivations étrangères d'Ecalle)

Groupe de Galois Gal$(\mathcal{T})$ **d'une théorie**

Soit $\mathcal{T}$ une QFT renormalisable. Son groupe de Galois Gal$(\mathcal{T})$ est le shéma en groupe affine associé à la sous-catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ des fibrés plats équisinguliers venant de $\mathcal{T}$. (on rajoute les sous-quotients de $\oplus \otimes$)

Proposition

Soit $\mathcal{T}$ une QFT renormalisable.

1) La théorie $\mathcal{T}$ est finie ssi son groupe de Galois est trivial Gal$(\mathcal{T}) = \{1\}$.

2) Si $\mathcal{T}$ est super-renormalisable, son groupe de Galois Gal$(\mathcal{T})$ est de dimension finie.

Exemples : ϕ_4^3 et $\phi_3^4 \to$ Gal$(\mathcal{T}) = \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$

P. Cartier, *Grothendieck et les motifs*, IHES/M/00/75.

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*. Comm. Math. Phys. 216 (2001), no. 1, 215–241.

A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, International Math. Research Notices, (2004), no. 76, 4073–4091.

A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number theory via Noncommutative Geometry, II : Renormalization, the Riemann–Hilbert correspondence, and motivic Galois theory*, to appear in "Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry" Vol.II. Preprint hep-th/0411114.